

FORSCHUNG - AUSBILDUNG - WEITERBILDUNG

BERICHT Nr. 9

<sup>304</sup>  
(MARKOV- UND RAINFLOW-REKONSTRUKTIONEN  
STOCHASTISCHER BEANSPRUCHUNGSZEITFUNKTIONEN

<sup>1006</sup>  
W. KRÜGER, M. SCHEUTZOW  
UND A. BESTE, J. PETERSEN

UNIVERSITÄT KAISERSLAUTERN  
FACHBEREICH MATHEMATIK  
ERWIN-SCHRÖDINGER-STRASSE  
6750 KAISERSLAUTERN

Mai 1985  
425

# INHALTSVERZEICHNIS

	Seite
1. Einleitung	3
2. Zählverfahren	5
3. Rekonstruktion von Beanspruchungszeitverläufen	6
3.1 Markov-Inversion	6
3.2 Rainflow-Inversion	15
3.3 Zufallsgeneratoren	26
4. Vergleich der Inversionsverfahren	31
4.1 Markov- und Markov-Residuum-Verfahren	31
4.2 Markov-Residuum und Rainflow	34
4.3 Speicherplatz und Rechenzeiten	42
4.4 Bewertung der Rekonstruktionsverfahren durch Lebensdauerberechnungen	44
5. Ausblick	51
6. Literatur	52
7. Bilderanhang	54

MARKOV- UND RAINFLOW-REKONSTRUKTIONEN  
STOCHASTISCHER BEANSPRUCHUNGSZEITFUNKTIONEN

W. Krüger, M. Scheutzwow<sup>+</sup> und A. Beste, J. Petersen<sup>++</sup>

ZUSAMMENFASSUNG

Zur Datenreduktion gemessener stochastischer Beanspruchungszeitfunktionen werden Zählverfahren eingesetzt. Mit den dabei entstehenden Beanspruchungskollektiven werden rechnerische Lebensdauerabschätzungen gemacht. Da diese mit großen Unsicherheiten behaftet sind, besteht der Wunsch, aus den Beanspruchungskollektiven on-line stochastische Beanspruchungszeitfunktionen zu rekonstruieren, damit ein experimenteller Lebensdauernachweis im Labor mit servohydraulischen Zylindern durchgeführt werden kann.

In bezug auf die Lebensdauer der Bauteile unter stochastischer Beanspruchung wird heute dem zweiparametrischen Rainflow-Zählverfahren die größte Bedeutung beigemessen. Es werden ein gegenüber /1/ verbessertes Markov-Inversionsverfahren und ein Rekonstruktionsverfahren aus der symmetrischen und der unsymmetrischen Rainflow-Matrix vorgestellt. Anhand von Beispielen werden diese Inversionsverfahren, die jeweils unter allen Zeitfunktionen, die zu der betreffenden Matrix führen, mit gleicher Wahrscheinlichkeit eine auswählen, verglichen. Es zeigt sich dabei, daß im Hinblick auf die Lebensdauer von Bauteilen unter stochastischer Beanspruchung die Rainflow-Inversionen zu wesentlich besseren Ergebnissen führt als die Markov-Inversionen.

---

Dieses Projekt wurde ermöglicht durch eine Forschungs Kooperation zwischen der Firma AUDI AG in Ingolstadt und der Arbeitsgruppe Technomathematik unter der Leitung von Prof. Neunzert an der Universität Kaiserslautern und der Förderung der Arbeitsgruppe durch die Stiftung Volkswagenwerk.

## 1. EINLEITUNG

In der Automobilindustrie stellt der zunehmende Leichtbau immer größere Anforderungen an einen Betriebsfestigkeitsnachweis. Dazu müssen die stochastischen Betriebslasten so gut wie möglich erfaßt werden, und zum anderen muß die Widerstandsfähigkeit des Bauteils bzw. des Werkstoffs gegen diese Betriebslasten nachgewiesen werden.

Zur Datenreduktion der Betriebslasten werden einparametrische Zählverfahren (DIN 45 667) und in neuerer Zeit zweiparametrische Zählverfahren

- Markov-Verfahren /2/
- Rainflow-Verfahren /2/, das mit dem range-pair-mean-Verfahren /2/ zu gleichen Ergebnissen führt, verwendet.

Das Rainflow-Verfahren zählt geschlossene Hysteresisschleifen der Beanspruchungszeitfunktion (BAZF), die für die Schädigung des Werkstoffs maßgebend sind. Auf der Basis der Zählergebnisse der BAZF werden rechnerische Lebensdauervorhersagen gemacht, wobei sich das Rainflow-Verfahren immer mehr durchsetzt. Wegen der großen Unsicherheit rechnerischer Lebensdauervorhersagen besteht in der Automobilindustrie zunehmend der Wunsch, Nachfahrversuche an KFZ-Bauteilen durchzuführen, wobei die BAZF aus den Zählergebnissen on-line zu rekonstruieren sind. Das bekannteste und daher am häufigsten angewandte Verfahren ist die Rekonstruktion der BAZF aus der Markov-Matrix nach Fischer, Köbler und Wendt/1/.

Für das Rainflow-Verfahren wurde von Conle /3/ ein Rekonstruktionsverfahren entwickelt, das nicht den vollen Informationsgehalt der Rainflow-Matrix enthält. Im folgenden wird gezeigt, wie eine BAZF aus der Rainflow-Matrix rekonstruiert wird.

Damit ergibt sich ein geschlossenes Konzept für

- Erfassung der BAZF
- rechnerischer Lebensdauernachweis
- Betriebslastennachfahrversuche

aus der Rainflow-Matrix. Zusätzlich werden die mathematischen Schwächen der Inversion der Markov-Matrix nach /1/ dargestellt und gezeigt, wie mit Hilfe der sogenannten "aufspannenden Bäume" der BAZF die Inversion der Markov-Matrix statistisch einwandfrei wird.

## 2. ZÄHLVERFAHREN

Bei den Zählverfahren werden nur die Umkehrpunkte (lokale Maxima und Minima) einer stochastischen Zeitfunktion (Abb.1) betrachtet, wobei jegliche Information über den Frequenzinhalt verloren geht.

In Abb.2 ist eine solche BAZF als Demonstrationsbeispiel dargestellt mit dem dazugehörigen Zählergebnis nach dem Markov-Verfahren. Dabei werden in der Markovmatrix die Übergänge von der Klasse  $i$  in die Klasse  $j$  registriert. Die Diagonalelemente sind definitionsgemäß null.

Abb.3 zeigt das Zählergebnis derselben BAZF nach Abb.2 nach dem Rainflow-Verfahren. Dabei werden Zwischenschwingungen, die geschlossene Hysteresisschleifen sind, eliminiert und deren Anzahl ebenfalls in einer Matrix abgespeichert, dabei entsteht die sogenannte symmetrische Rainflow-Matrix und das Residuum  $/2/$ , wobei gleichzeitig eine Halbschwingung von Klasse  $i$  nach Klasse  $j$  und umgekehrt abgespeichert wird.

Der Unterschied zwischen dem symmetrischen und unsymmetrischen Rainflow-Verfahren besteht darin, daß man beim letzteren Zwischenschwingungen danach unterscheidet, ob sie im aufsteigenden Ast oder im abfallenden Ast eliminiert worden sind (Abb.3). Man erhält die symmetrische Rainflow-Matrix aus der unsymmetrischen, indem man die Elemente der einen Dreiecksmatrix an der Diagonalen spiegelt, und zu denen der anderen Dreiecksmatrix addiert.

### 3. REKONSTRUKTION VON BEANSPRUCHUNGSZEITVERLÄUFEN

Da sowohl bei dem Markov- als auch bei dem Rainflow-Zählverfahren keine Informationen über den Frequenzinhalt der ursprünglich gewählten BAZF vorliegen, ist es selbstverständlich, daß auch bei der Rekonstruktion von BAZF nur eine Folge von Umkehrpunkten durch Angabe der jeweiligen Klassen erzeugt werden kann. Damit sind die rekonstruierten BAZF nur zur festigkeitsmäßigen Bauteilprüfung geeignet, wenn es sich

- nicht um ein schwingungsfähiges Bauteil handelt
- und eine einaxiale oder eine nicht korrelierte, mehrachsige Prüfung zulässig ist.

An den Algorithmus zur Inversion der Markov- und der Rainflowmatrix muß die Forderung gestellt werden, daß jede mögliche BAZF, die das gleiche Zählergebnis besitzt, mit gleicher Wahrscheinlichkeit bei der Rekonstruktion auftritt.

#### 3.1 MARKOV-INVERSION

Beim Markov-Zählverfahren wird eine diskrete BAZF  $X(t_i)$ ,  $i=1, \dots, m$  welche nur die endlich vielen Klassenwerte  $y_1 < y_2 < \dots < y_n$  annehmen kann zunächst reduziert, indem alle Funktionswerte, die keine lokalen Maxima oder Minima sind, gestrichen werden, d.h., es gilt stets entweder

$$X(t_i) > X(t_{i-1}) \text{ und } X(t_i) > X(t_{i+1}) \text{ oder}$$

$$X(t_i) < X(t_{i-1}) \text{ und } X(t_i) < X(t_{i+1}).$$

Dann wird die Häufigkeit eines jeden Überganges in einer  $n \times n$ -Matrix  $P$  notiert, wobei das Element  $P(i,j)$  in der Zeile  $i$  und Spalte  $j$  die Anzahl der unmittelbaren Übergänge vom Wert  $y_i$  zum Wert  $y_j$ , d.h. von Klasse  $i$  nach Klasse  $j$ , angibt.

Diagonalelemente  $P(i,i)$  sind definitionsgemäß null.

Bevor wir mit der Rekonstruktion von BAZF aus der Markov-Matrix beginnen, benötigen wir folgende Bezeichnungen:

$n$  : Anzahl der Klassen  
 $N_p$  : Gesamtzahl der Umkehrpunkte  
 $N_{\ddot{u}}$  : Gesamtzahl der Übergänge  
 $N_{ab}$  : Gesamtzahl der Abwärtshalbschwingungen  
 $N_{auf}$  : Gesamtzahl der Aufwärtshalbschwingungen

Mit den Definitionen nach Abb. 4

$Z_{u,i}$  : Summe aller Halbschwingungen aus der Klasse  $i$  nach unten  
 $Z_{o,i}$  : Summe aller Halbschwingungen aus der Klasse  $i$  nach oben  
 $S_{u,j}$  : Summe aller Halbschwingungen von unten in die Klasse  $j$   
 $S_{o,j}$  : Summe aller Halbschwingungen von oben in die Klasse  $j$

$$N_{auf} = \sum_{i=1}^n Z_{o,i}$$

$$N_{ab} = \sum_{i=1}^n Z_{u,i}$$

$$N_{\ddot{u}} = N_{auf} + N_{ab}$$

$$N_p = N_{\ddot{u}} + 1$$

lassen sich die möglichen Startpunkte für eine Rekonstruktion bestimmen. Dabei muß man zwischen gerader und ungerader Anzahl aller Halbschwingungen unterscheiden.

I. Es sei  $N_{\ddot{u}}$  gerade, d.h., die Zahl der Aufwärtshalbschwingungen  $N_{auf}$  ist gleich der Zahl der Abwärtshalbschwingungen  $N_{ab}$ .

a) In dem Fall, daß für jede Klasse  $i$  die Anzahl der aus der Klasse  $i$  herausgehenden Halbschwingungen gleich der in der Klasse  $i$  ankommenden Halbschwingungen ist, d.h.

$$Z_{u,i} + Z_{o,i} = S_{u,i} + S_{o,i} \quad \text{für alle } i = 1, \dots, n \quad (1)$$

folgt, daß jede Klasse  $i$  als Startwert genommen werden kann, sofern die entsprechende Zeilen- bzw. Spaltensumme



$$S_{u,i} + S_{o,i} \quad \text{bzw.} \quad Z_{u,i} + Z_{o,i} \quad (2)$$

nicht gleich null sind. Der Endpunkt muß in diesem Fall gleich dem Startpunkt sein. Jede der möglichen Halbschwingungen ist dann auch als erste Halbschwingung der zu rekonstruierenden BAZF zulässig.

- b) In allen anderen Fällen (bei geraden  $N$ ) gibt es zwei eindeutig bestimmte Klassen  $i_A$  und  $i_E$ , für die gilt

$$S_{u,i_A} + S_{o,i_A} = Z_{u,i_A} + Z_{o,i_A} - 1 \quad (3)$$

d.h., es wird einmal mehr aus der Klasse  $i_A$  herausgesprungen als hineingesprungen, und

$$Z_{u,i_E} + Z_{o,i_E} = S_{u,i_E} + S_{o,i_E} - 1 \quad (4)$$

d.h., es wird einmal mehr in die Klasse  $i_E$  hineingesprungen als hinaus. Somit ist  $i_A$  die Startklasse und  $i_E$  die Endklasse.

Weiterhin sieht man unmittelbar, daß im Fall

$$S_{o,i_A} = Z_{o,i_A} - 1$$

mit einer Aufwärtshalbschwingung begonnen und mit einer Abwärtshalbschwingung geendet werden muß, während man im Fall

$$S_{u,i_A} = Z_{u,i_A} - 1$$

genau umgekehrt zu verfahren hat.

- II. Ist  $N$  ungerade, es unterscheidet sich also die Zahl der Aufwärts- und Abwärtshalbschwingungen um 1, d.h.

$$|N_{\text{auf}} - N_{\text{ab}}| = 1,$$

so muß man im Fall

$$N_{\text{ab}} = N_{\text{auf}} + 1$$

mit einer Abwärtsschwingung beginnen und enden.

Die Startklasse  $i_A$  und die Endklasse  $i_E$  ergeben sich durch

$$S_{u,i_A} = Z_{u,i_A} - 1$$

und

$$S_{o,i_E} = Z_{o,i_E} + 1 .$$

Für  $N_{\text{auf}} = N_{\text{ab}} + 1$  muß man mit einer Aufwärtsschwingung

beginnen und enden. Die Startklasse  $i_A$  und die Endklasse  $i_E$  ergeben sich durch

$$S_{o,i_A} = Z_{o,i_A} - 1$$

$$S_{u,i_E} = Z_{u,i_E} + 1 .$$

Aus diesen Überlegungen folgt unmittelbar ein notwendiges Kriterium dafür, daß eine gegebene  $n \times n$ -Matrix eine zulässige Markov-Matrix ist, d.h. die Rekonstruktion einer BAZF gestattet.

- (I) alle Matrixelemente sind nichtnegative, ganze Zahlen
- (II) die Diagonalelemente sind null
- (III) entweder ist für alle  $i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) die Zeilensumme gleich der entsprechenden Spaltensumme ( Gl. 1 ),  
oder es existieren zwei eindeutig bestimmte Indizes  $i_A, i_E$  für die Gl. 3 und Gl. 4 gültig sind und für alle anderen Indizes sind die Zeilensummen gleich den entsprechenden Spaltensummen.

Darüber hinaus wird nun ein notwendiges und hinreichendes Kriterium dafür hergeleitet, daß eine gegebene Matrix  $P$  eine zulässige Markov-Matrix ist. Dabei ergibt sich gleichzeitig ein Rekonstruktionsverfahren, welches den vorn gestellten Forderungen an ein solches genügt. Dazu sei

$$X = (X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_m))$$

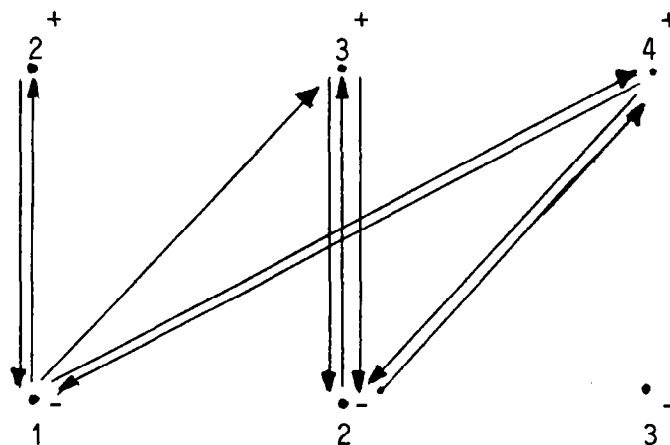
eine BAZF und  $P$  die zugehörige Markov-Matrix, etwa gemäß Abb. 2

$$X = (1, 3, 2, 4, 1, 2, 1, 4, 2, 3, 2)$$

und

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dann verstehen wir unter dem zu  $P$  gehörigen Graphen  $G(P)$  den Graphen mit den Ecken  $1^-, 2^-, \dots, (n-1)^-, 2^+, 3^+, \dots, n^+$  und den durch die Matrix  $P$  gegebenen, gerichteten Mehrfachkanten, unterschieden nach Aufwärts- und Abwärtshalbschwingungen. Für das obige Beispiel ergibt sich  $G(P)$  als:



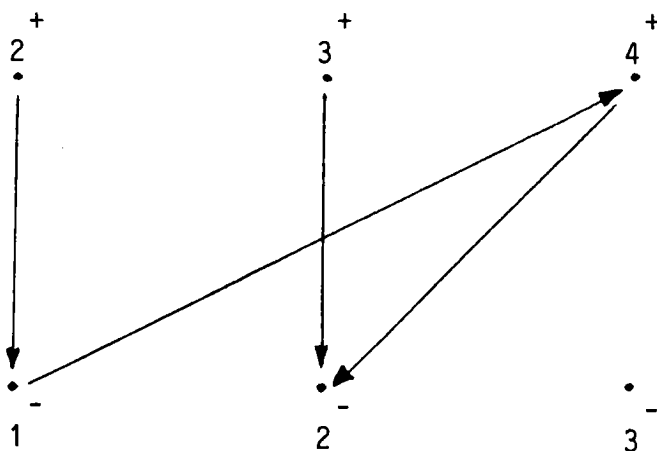
Die Ecken  $1^-, 2^-, \dots, (n-1)^-$  entsprechen also den Klassen  $1, 2, \dots, n-1$

welche durch eine Abwärtshalbschwingung erreicht, und durch eine Aufwärtshalbschwingung verlassen werden.

Bei den Ecken  $2^+, 3^+, \dots, n^+$  ist es genau umgekehrt. Die eingezeichneten Kanten sind die jeweils verbindenden Halbschwingungen. Mehrfach gleiche Halbschwingungen werden auch als mehrfache Kanten aufgeführt. Jedem Abarbeiten der Matrix  $P$ , d.h. jeder Markov-Inversion der Matrix  $P$ , entspricht nun genau ein Durchlaufen des Graphen  $G(P)$  derart, daß jede Kante genau einmal durchlaufen wird. Ein solcher Weg entlang der Kanten des Graphen  $G(P)$  heißt "Eulerweg".

Unter einem aufspannenden Baum eines gerichteten Graphen  $G$  versteht man einen Teilgraph  $\bar{G}$ , bei dem man von jedem Knoten, von dem überhaupt Kanten von  $G$  ausgehen, auf einem eindeutig bestimmten Weg einen ausgezeichneten Knoten  $E_0$  erreicht. Insbesondere hat ein solcher Baum keine Zyklen und ist zusammenhängend bezüglich der Knoten, von denen Kanten ausgehen. Man nennt einen solchen Graphen  $\bar{G}$  auch einen in  $E_0$  einlaufenden Baum.

Zu jedem Durchlaufen des Graphen  $G(P)$ , also insbesondere zu der gegebenen BAZF selbst, gehört ein "aufspannender Baum". Dies ist ein Teilgraph von  $G(P)$ , welcher jeder Ecke des Graphen die überhaupt durchlaufen wird (außer dem Endpunkt) seinen letzten Nachfolger zuordnet. Der aufspannende Baum obiger BAZF lautet:



Bezeichnen wir den aufspannenden Baum mit  $V$ , so gilt also

$$\begin{array}{ccc} V(1^-) = 4^+ & V(2^-) = 0 & V(3^-) = 0 \\ V(2^+) = 1^- & V(3^+) = 2^- & V(4^+) = 2^- \end{array}$$

Vereinbaren wir nun, daß wir im Argumentbereich von  $V$  die Ecken

$$1^-, 2^-, \dots, (n-1)^- \text{ durch } 1, 2, \dots, n-1$$

und

$$2^+, 3^+, \dots, n^+ \text{ durch } n, n+1, \dots, 2n-2$$

ersetzen und im Bildbereich die Zusätze " $+$ " und " $-$ " weglassen, dann ergibt sich für das obige Beispiel

$$V(1)=4, V(2)=0, V(3)=0, V(4)=1, V(5)=2, V(6)=2.$$

Man überlegt sich leicht, daß daraus die ursprüngliche "Baumnotation" in eineindeutiger Weise rekonstruierbar ist.

Der oben definierte Vektor  $V = (V(1), \dots, V(2n-2))$  läßt sich natürlich sehr leicht während des Markov-Zählverfahrens rekursiv bestimmen.

Dazu wird dem Startpunkt  $X(t_0)$  der Vektor

$$V^{(0)} = (0, 0, \dots, 0) \quad \text{mit } 2n-2 \text{ Komponenten}$$

zugeordnet. Bei jedem neuen Wert  $X(t_k)$  trägt man in  $V^{(k)}$  die zuletzt

durchgeführte Halbschwingung ein. Den aufspannenden Baum  $V$  erhält man

dann aus  $V^{(m)}$ , indem man für den letzten Punkt  $X(t_m)$  in  $V^{(m)}$  an der

entsprechenden Stelle eine Null einträgt.

Im weiteren Text bezeichnen wir den so gewonnenen aufspannenden Baum in Anlehnung an das Rainflow-Residuum mit "Markov-Residuum". In Abb. 5 ist für das Beispiel nach Abb. 2 die rekursive Bestimmung des Markov-Residuums mit dem dazugehörigen Graphen dargestellt.

Fügt man den Bedingungen (I), (II), (III) die Bedingung

(IV): es existiert ein aufspannender Baum, das "Markov-Residuum",

hinzu, so erhält man ein notwendiges und hinreichendes Kriterium dafür, daß  $P$  eine zulässige Markov-Matrix ist.

Aus diesen Überlegungen erkennt man, daß sich alle Markov-Rekonstruktionen zu einer gegebenen zulässigen Markov-Matrix dadurch ergeben, daß alle Markov-Residuen bestimmt und zu jedem Markov-Residuum alle BAZF rekonstruiert werden. Bei vorgegebenem Markov-Residuum gibt es ein einfaches Verfahren, welches unter allen möglichen BAZF mit gleicher Wahrscheinlichkeit eine auswählt. Dazu "subtrahiert" man zunächst das Markov-Residuum von der gegebenen Markov-Matrix und entscheidet sich dann bei der Abarbeitung der Restmatrix zufällig (mit gleicher Wahrscheinlichkeit) für eine der jeweils möglichen Mehrfachkanten und verringert die aktuelle Markov-Matrix um die entsprechend ausgewählte Halbschwingung. Hat man in einem Zustand keine Möglichkeit mehr für einen Übergang, so nimmt man den durch das Markov-Residuum vorgeschriebenen Übergang. Die jeweilige Auswahl der möglichen Übergänge geschieht mit einem einzigen Zufallsgenerator (vergl. 3.3), bei dem besonders Wert auf eine gute Approximation der Gleichverteilung auf  $[0,1)$  und die Unabhängigkeit der erzeugten Zahlen gelegt wird.

Als Beispiel sind in Abb.6 alle möglichen Rekonstruktionen aus der Markov-Matrix nach Abb.2 und dem Residuum  $V = (4,0,0,1,2,2)$  dargestellt.

Für eine vollständige Inversion müßte man nun zu einer gegebenen Markov-Matrix alle aufspannenden Bäume bestimmen und unter diesen gemäß der richtigen Verteilung zufällig einen auswählen und dann wie oben beschrieben weiterverfahren. Man kann zwar mit Hilfe des Matrix-Baum-Theorems die Anzahl aller aufspannenden Bäume leicht berechnen /4/, doch da nicht zu jedem aufspannenden Baum gleich viele Rekonstruktionen existieren, ist die zufällige Auswahl eines aufspannenden Baumes sehr aufwendig.

Abb.7 zeigt eine BAZF, die nach Markov gezählt und für die das Markov-Residuum notiert wurde.

Man sieht leicht, daß es vier in " 3 " <sup>+</sup> einlaufende Bäume gibt (Abb. 8

$$V_1 = (3,4,0,0,0,1)$$

$$V_2 = (3,3,0,0,0,1)$$

$$V_3 = (3,3,0,0,0,2)$$

$$V_4 = (4,3,0,0,0,2)$$

Zu  $V_1$  gibt es als einzige mögliche Rekonstruktion die vorgegebene

BAZF selbst. Zu  $V_2$ ,  $V_3$  und  $V_4$  ergeben sich jeweils zwei mögliche BAZF.

Hat man das Markov-Residuum der gemessenen BAZF nicht registriert, so müßte für ein wirklich zufälliges Verfahren zunächst einer der

Bäume  $V_1$ ,  $V_2$ ,  $V_3$ ,  $V_4$

zufällig gemäß dem Wahrscheinlichkeitsvektor  $P = (1/7, 2/7, 2/7, 2/7)$  ausgewählt werden und dann wie oben beschrieben verfahren werden.

Hat man das Residuum mitgezählt, so entfallen diese Schwierigkeiten. Im vorliegenden Beispiel erhält man dann bei allen Rekonstruktionen immer die Ausgangs-BAZF (Abb. 7).

### 3.2 Rainflow-Inversion

Das beschriebene Verfahren zur Rekonstruktion von Beanspruchungszeitfunktionen (BAZF) aus der Markov-Matrix mit Markovresiduum läßt sich nicht auf die Inversion von Rainflow-Matrizen übertragen. Hat man nämlich eine BAZF schon teilweise rekonstruiert, so kann man aus der Restmatrix, nach Abzug der schon verwendeten Zwischenschwingungen, im Gegensatz zur Markovrekonstruktion nicht ohne weiteres die Wahrscheinlichkeiten für die nächsten Übergänge ablesen. Man kann aber folgendermaßen vorgehen:

Zunächst wählt man aus der Rainflowmatrix A das positive Element, das am weitesten von der Hauptdiagonale entfernt ist, d.h. man wählt eine Zwischenschwingung mit maximaler Amplitude. Gibt es mehrere, so nimmt man irgendeine. Nun sieht man nach, an welchen Stellen man eine solche Schwingung in das Residuum legen kann, derart, daß beim Rainflow-Zählen der so entstandenen BAZF diese Zwischenschwingung wieder herausfällt.

Unter all diesen Positionen wählt man eine zufällig und legt die Schwingung dort hinein. Als Beispiel wählen wir die unsymmetrische Rainflowmatrix A (Abb. 9)

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

mit dem Residuum

$$V = ( 2 , 1 , 4 , 1 , 3 , 2 )$$

Die Zwischenschwingungen mit den größten Amplituden sind (3,1), (4,2) und zweimal (1,3). Wählen wir z.B. (3,1). Offenbar paßt



(3,1) nicht zwischen die erste Residuumschwingung (2,1), denn erstens ist (3,1) fallend und paßt somit nur in aufsteigende Intervalle und zweitens ist sie zu groß. Dagegen paßt (3,1) in die nächste Residuumschwingung (1,4). Arbeitet man nämlich (2,1,3,1,4,1,3,2) mit dem Rainflowalgorithmus ab, so fällt (3,1) als Zwischenschwingung heraus. In die nächste Residuumschwingung (4,1) paßt (3,1) nicht, da beide fallend sind. In die nächste Residuumschwingung (1,3) paßt (3,1) auch nicht, da beim Abarbeiten von (2,1,4,1,3,1,3,2) (1,3) als Zwischenschwingung von (4,1) herausfällt und nicht (3,1). Offensichtlich paßt (3,1) auch nicht in die letzte Residuumschwingung (3,2), so daß man (3,1) nur in (1,4) legen kann. Hat man dies getan, so nimmt man eine weitere Schwingung mit maximaler Amplitude z.B. (4,2). Wie vorher testet man alle Schwingungen des Residuums daraufhin, ob (4,2) dort hineinpaßt. Dabei sieht man, daß dies wiederum nur in (1,4) möglich ist. Da dort schon (3,1) liegt, muß man sich überlegen, ob man (4,2) vor oder hinter (3,1) legt. Im ersten Fall hätte man

(2,1,4,2,3,1,4,1,3,2)

Arbeitet man diese BAZF mit dem Rainflowalgorithmus ab, so fällt als erste Zwischenschwingung (2,3) heraus, im zweiten Fall

(2,1,3,1,4,2,4,1,3,2)

fällt zuerst (3,1) und dann (4,2) als Zwischenschwingung von (1,4) heraus, d.h., der erste Fall stellt im Gegensatz zum zweiten keine Rainflowrekonstruktion dar. Nun kommen wir zu den letzten beiden Schwingungen (1,3) mit maximaler Amplitude. Diese passen offenbar nur in das Residuum (4,1). Wir legen also beide Schwingungen dort hintereinander hinein. Die bisher teilrekonstruierte BAZF lautet nun:

(2,1,3,1,4,2,4,1,3,1,3,1,3,2)

Nun betrachten wir die nächste Nebendiagonale von A, d.h. Zwischenschwingungen mit der Amplitude 1. Hier tritt nur (2,3)



Wir wollen nun die wesentlichen Schritte dieses Rainflowalgorithmus darstellen. Wir betrachten eine nicht symmetrische Rainflowmatrix. Der programmierte Algorithmus existiert auch für den symmetrischen Fall. Im Programmablauf wird neben der Rainflowmatrix A noch eine Steuermatrix B, sowie eine Matrix C benötigt, in der für jede Schwingung die Zahl der Möglichkeiten notiert wird, diese Schwingung in oder neben Schwingungen größerer Amplitude oder ins Residuum zu legen.

Es werden alle Matrizen A,B,C im Laufe des Programms auf den neuesten Stand gebracht, sobald eine neue Schwingung in das Residuum gelegt wird. Man kann zeigen, daß  $C(i,j)$ , d.h. die Anzahl aller Möglichkeiten, die Schwingung  $(i,j)$  in oder neben größere Schwingungen oder in das Residuum zu legen nicht davon abhängt, wo die größeren Schwingungen  $(I,J)$  liegen. Dies ist eine sehr wichtige Eigenschaft, ohne die eine Inversion on-line kaum möglich wäre und nur deshalb kann man überhaupt die Matrix C a priori relativ einfach berechnen.

Anhand desselben Beispiels werden nun die wesentlichen Schritte des on-line-Verfahrens erklärt.

Neben der unsymmetrischen Rainflowmatrix A (Abb.9)

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

und dem Residuum  $V = ( \underline{2} , \underline{1} , \underline{4} , \underline{1} , \underline{3} , \underline{2} )$  müssen wir im ersten Schritt die Matrix C bestimmen, die für jede Schwingung  $(i,j)$  der Rainflowmatrix A die Anzahl der verschiedenen Positionen  $C(i,j)$  in der zu rekonstruierenden BAZF angibt. Aufgrund der bereits durchgeführten Rekonstruktion im 1. Abschnitt (Abb.9) wissen wir, welche Werte C haben muß:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dies bedeutet

- für die 2 Schwingungen (1,3) (  $A(1,3) = 2$  ) ist  $C(1,3) = 1$ , d.h. es gibt für die Schwingung (1,3) nur eine mögliche Position, nämlich in der Residuumschwingung (4,1).
- für die 2 Schwingungen (2,3) ist  $C(2,3) = 2$ , d.h. es gibt für die Schwingungen (2,3) zwei mögliche Positionen, nämlich die Residuumschwingung (4,1) oder die Schwingung (4,2) von A.
- für die eine Schwingung (3,1) ist  $C(3,1) = 1$ , d.h. es gibt für (3,1) nur eine Position, nämlich die Residuumschwingung (1,4)
- für die eine Schwingung (4,2) ist  $C(4,2) = 1$ , d.h. es gibt für (4,2) nur eine Position, die Residuumschwingung (1,4).

Nun zerlegt man die Matrix C in zwei Anteile,

$$C = CA + CV,$$

wobei  $CA(i,j)$  die Zahl der Möglichkeiten angibt, die Schwingung (i,j) der Matrix A in größeren Schwingungen (I,J) bzw. neben größeren Schwingungen (I,J) unterzubringen.  $CV(i,j)$  gibt an, wieviele Möglichkeiten es gibt, die Schwingung (i,j) von A im Residuum V unterzubringen. Für unser Beispiel ergibt sich also:

$$CA = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad CV = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Abb.10 zeigt als Schema die allgemeine Bestimmung von CA für den Fall, daß (i,j) eine Aufwärtsschwingung ist. Die für die Rekonstruktion erforderliche Steuermatrix B ist in Abb.11 dar-

gestellt. Die erste Spalte von B beschreibt die momentan betrachtete Schwingung (i,j) von A, wobei die Zeile k von B die um eine Klassenbreite reduzierte Amplitude der Schwingung (i,j) angibt:

$$k = |j - i| - 1$$

Der Wert des Matrixelementes B (k,1) gibt den ersten Wert der Schwingung (i,j) an, also

$$B ( k , 1 ) = i$$

( Von der Amplitude  $|j-i|$  wird 1 abgezogen, da für Schwingungen (i,j) mit der Amplitude 1 die in der Steuermatrix enthaltenen Informationen nicht benötigt werden ).

Die zweite Spalte von B gibt an, wie häufig die momentan betrachtete Schwingung (i,j) ausgegeben werden soll. Diese Häufigkeit r wird mit dem Zufallsgenerator bestimmt, wenn in der Matrix C das entsprechende Element C(i,j) größer 1 ist. Es gilt also:

$$\begin{aligned} \text{Für } A ( i , j ) &> 0 & \text{ und} \\ C ( i , j ) &> 1 \end{aligned}$$

liefert der Zufallsgenerator

$$B ( k , 2 ) = r \quad \text{mit} \quad 0 \leq r \leq A ( i , j )$$

Die dritte Spalte von B gibt Auskunft über den momentanen Status der Schwingung (i,j). Ist der erste Wert von (i,j), also i, noch nicht ausgegeben worden, so ist

$$B ( k , 3 ) = -1.$$

Ist i schon ausgegeben worden aber j noch nicht, so ist

$$B ( k , 3 ) = 0.$$

Sind  $i$  und  $j$  ausgegeben worden, oder ist die Schwingung  $(i,j)$

gar nicht ausgelost worden, d.h.  $r = 0$ , so ist

$$B(k, 3) = 1.$$

Beginnen wir nun mit der Rekonstruktion. Als erster Wert wird stets der erste Wert des Residuums ausgegeben

1. Wert: 2

Es wird nun die erste abfallende Schwingung des Residuums  $V$  also  $(\underline{2}, \underline{1})$  betrachtet. In diese abfallende Schwingung mit der Amplitude 1 würde nur die aufsteigende Schwingung  $(1,2)$  passen, die aber in  $A$  nicht vorkommt ( $A(1,2) = 0$ )

2. Wert: 1

Es wird nun die zweite aufsteigende Residuumsschwingung  $(\underline{1}, \underline{4})$  betrachtet. Die größte Schwingung, die in  $(\underline{1}, \underline{4})$  passen würde, wäre  $(4,1)$ ; diese ist in  $A$  nicht vorhanden. Die nächst kleinere ist  $(3,1)$ , die in  $A$  vorkommt. Da  $C(3,1) = 1$ , muß die Schwingung in  $(\underline{1}, \underline{4})$  gelegt werden. Es wird nun der Wert 1 von  $A(3,1) = 1$  und  $C(3,1) = 1$  abgezogen, d.h. es ist jetzt  $A(3,1) = 0$  und  $C(3,1) = 0$  und

$$B(1,1) = 3 \quad B(1,2) = 1 \quad B(1,3) = -1$$

In Worten bedeutet dies:

Für die in  $A$  nur einmal vorkommende Schwingung  $(3,1)$  gibt es nur eine Möglichkeit für die Ausgabe, da  $C(3,1) = 1$  ist, und zwar nur in die Residuumsschwingung  $(\underline{1}, \underline{4})$ . Deshalb wird  $A(3,1)$  und  $C(3,1)$  um 1 reduziert. In der Steuermatrix  $B$  wird  $B(1,1) = 3$  gesetzt; ( $K = |3-1|-1 = 1$  und der erste Wert von  $(3,1)$  ist 3).  $B(1,2) = 1$ , da eine Schwingung  $(3,1)$  ausgegeben werden soll und  $B(1,3) = -1$ .

Damit ist:

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Es ist noch kein Wert von (3,1) ausgegeben worden, da noch zu prüfen ist, ob vor 3 weitere Schwingungen passen. Vor die Schwingung (3,1) könnten noch (2,1) und (3,2) passen, die in A nicht vorkommen. Deshalb wird  $B(1,3) = 0$  gesetzt und 3 von (3,1) ausgegeben.

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3.Wert: 3

Obwohl die Schwingung (2,3) formal in (3,1) wegen  $A(2,3) \neq 0$  und  $C(2,3) \neq 0$  passen würde, darf diese Schwingung nicht ausgegeben werden, da gemäß dem Rainflowalgorithmus (3,2) anstelle (2,3) gezählt werden würde. Dagegen würde (1,2) zwischen (3,1) passen und dem Zählalgorithmus nicht widersprechen. Da jedoch  $A(1,2) = 0$  ist, wird nun  $B(1,3) = 1$  gesetzt und die 1 von (3,1) ausgegeben.

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4.Wert: 1

In das zuvor betrachtete Residuum (1,4) haben wir (3,1) eingeordnet. Es wird nun die aufsteigende Schwingung (1,4) betrachtet. Die größte Schwingung, die in (1,4) paßt, ist (4,2), die in A einmal vorhanden ist und für die es gemäß  $C(4,2) = 1$  nur eine Anordnung gibt, nämlich in (1,4).

Deshalb wird  $A(4,2)$  und  $C(4,2)$  um 1 reduziert und es ist:

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vor der 4 von (4,2) könnten (3,2) und (4,3) liegen, die jedoch in A nicht vorhanden sind. Es wird deshalb  $B(1,3) = 0$  gesetzt und 4 ausgegeben.

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

5.Wert: 4

In die Schwingung (4,2) würde (3,4) passen, die in A nicht vorhanden ist. Als nächste folgt (2,3), die es gibt, da  $A(2,3) = 2$  ist und für die es 2 Möglichkeiten entsprechend  $C(2,3) = 2$  gibt. Der nun benötigte Zufallsgenerator (vergl. 3.3) möge entschieden haben, daß eine Schwingung (2,3) in (4,2) gelegt wird. Damit wird 1 von  $A(2,3)$  und  $C(2,3)$  subtrahiert und die Schwingung sofort ausgegeben, da sie die Amplitude 1 hat. Anschließend wird die 2 von (4,2) ausgegeben und:

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

6.Wert: 2

7.Wert: 3

8.Wert: 2

Da die Schwingung (4,3), die theoretisch in das Intervall (2,4) gelegt werden könnte, nicht vorhanden ist, kann der Wert 4 des Residuums ausgegeben werden.

9.Wert: 4

Es wird nun die abfallende Residuumsschwingung (4,1) betrachtet. In (4,1) paßt (1,3), die in A zweimal vorhanden ist. Wegen  $C(1,3) = 1$  wird kein Zufallsgenerator benötigt; die zwei



Schwingungen (1,3) müssen in (4,1) gelegt werden. Es wird von A(1,3) 2 und von C(2,3) 1 subtrahiert und es ist:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

In A ist nur noch das Element A(2,3) = 1, alle anderen sind null und C(2,3) = 1. Da vor (1,3) die Schwingung (2,3) mit der Amplitude 1 paßt, wird A(2,3) = 0 und (2,3) ausgegeben.

10.Wert: 2

11.Wert: 3

Da nun die Matrix A leer ist, wird:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

und damit die zwei Schwingungen (1,3) hintereinander ausgegeben.

12.Wert: 1

13.Wert: 3

14.Wert: 1

15.Wert: 3

Es können nun die restlichen Residuumswerte ausgegeben werden.

16.Wert: 1

17.Wert: 3

18.Wert: 2

Für die Rekonstruktion werden folgende Eingaben in dem Programm benötigt:

- Anzahl der Klassen n der Rainflowmatrix A
- Rainflowmatrix A
- Residuumvektor V
- nicht negative ganze Zahl zur Initialisierung des Zufallgenerators.

Bevor mit der Rekonstruktion begonnen wird, wird vom Programm geprüft, ob das Residuum  $V$  mit der Rainflowmatrix  $A$  kompatibel ist. Falls das nicht der Fall ist, so werden vom Programm Vorschläge gemacht, wie die Matrix  $A$  zu verändern ist, damit eine vollständige Rekonstruktion möglich ist. Neben etwa 10 Variablen, die hier nicht beschrieben worden sind, müssen lediglich die Matrizen  $A, B, C$  und der Vektor  $V$  gespeichert werden, deren Speicherplatz nur von der Klassenzahl  $n$  und nicht von der Länge der zu rekonstruierenden BAZF abhängen. Anders formuliert hängen zu jedem Zeitpunkt die weiteren Schritte des Algorithmus nur von diesen Variablen ab, nicht aber davon, wieviele Werte und in welcher Reihenfolge Werte ausgegeben worden sind. Dieses "Unabhängigkeitsprinzip", mathematisch "Markoveigenschaft" genannt, beruht unter anderem darauf, daß jede BAZF mit derselben Wahrscheinlichkeit ausgegeben werden soll. Wäre dagegen eine andere als die Gleichverteilung gefordert, so könnte dieses Unabhängigkeitsprinzip unter Umständen zusammenbrechen und der Algorithmus würde wesentlich komplizierter.

### 3.3 ZUFALLSGENERATOREN

Wie in den vorangegangenen Abschnitten deutlich wurde, ist die Erzeugung von Zufallszahlen, d.h. die zufällige Auswahl von Zahlen aus einer Menge von Zahlen, ein wichtiges Hilfsmittel bei Rekonstruktionen von Beanspruchungszeitfunktionen. Wir verwenden dazu einen programmierbaren Generator. Dies ist ein Verfahren, welches einem Rechner in Form eines Algorithmus einprogrammiert wird und rekursiv Zahlen aus einer vorgegebenen Gesamtheit erzeugt. Ein solcher Algorithmus läßt sich in vielen Fällen einfach durch eine Abbildung

$$f: \{0,1,\dots,N\} \longrightarrow \{0,1,\dots,N\}$$

beschreiben, und man erhält die gesuchte Folge von Zahlen aus

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad \text{bzw.} \quad z_n = \frac{x_n}{N+1}.$$

Die so erhaltenen Zahlen  $z_n$  sollten nun bestimmten Anforderungen genügen:

- 1.) Die Folge  $\{z_n\}$  soll gleichförmig über dem Intervall  $[0,1)$  verteilt sein, d.h. die Wahrscheinlichkeit, daß irgendein Glied der Folge in ein gegebenes Teilintervall von  $[0,1)$  fällt, ist gleich der Länge des Teilintervalls.
- 2.) Zwischen den einzelnen Folgengliedern soll keine Abhängigkeit erkennbar sein, d.h. die einzelnen Zahlen  $z_n$  sollen die Ergebnisse eines unabhängig wiederholten Zufallsexperimentes zur Gleichverteilung auf  $[0,1)$  sein.
- 3.) Die Anzahl der für die Erzeugung einer Zahl  $z_n$  erforderlichen Rechenoperationen sollte nicht zu groß sein, d.h. die Vorschrift  $f$  sollte nicht zu kompliziert sein.

Unter Berücksichtigung dieser Forderung bietet sich für die Praxis ein Typ von Generator an, der bislang allen anderen Erzeugungsmethoden überlegen ist. Dieser Generator läßt sich durch folgenden Algorithmus beschreiben:

$$x_{n+1} = \sum_{i=0}^k a_i x_{n-i} + c \mod M$$

Dabei sind  $a_i, c, k \in \{0, 1, 2, \dots\}$  mit  $M \geq 2$ .

Man nennt solche Generatoren Kongruenzgeneratoren oder auch lineare Generatoren; sie wurden bereits Ende der vierziger Jahre von J.v.Neumann vorgeschlagen. Wir verwenden bei unseren Simulationen den folgenden Spezialfall:

$$x_{n+1} = a x_n + c \mod M$$

Der Vorteil dieses Generators liegt darin, daß man viele seiner Eigenschaften im voraus berechnen und so die Voraussetzung schaffen kann, daß die erzeugten Zufallszahlen die bekannten Tests günstig bestehen. Für  $M = 2^{31}$  ist  $a = 45965$  und  $c = 453816691$  optimal.

Es genügt übrigens nicht, wie man an vielen Stellen leider fälschlich liest, die Parameter  $a$  und  $c$  so zu wählen, daß die Länge des entsprechenden Generators, also die Anzahl der verschiedenen erzeugten Zufallszahlen, maximal wird. Auf die Einzelheiten entsprechender theoretischer Überlegungen hierzu soll an dieser Stelle nicht näher eingegangen werden /10/.

Gehen wir davon aus, daß in Abhängigkeit des verwendeten Rechners die Zahlen  $a$ ,  $c$  und  $M$  in gewisser Weise optimal gewählt wurden, dann müssen aus den so erhaltenen Zufallszahlen noch die entsprechenden zufälligen Entscheidungen bei den oben beschriebenen Rekonstruktionen abgeleitet werden. Für die Markovrekonstruktion ist dies sehr leicht und ergibt sich unmittelbar aus dem in 3.1 beschriebenen Zusammenhang. Für die Rainflowrekonstruktion ist dies die Frage nach der richtigen zufälligen Ent-

scheidung bei der Auslosung von möglichen Schwingungen. Etwas ausführlicher formuliert bedeutet dies folgendes:

Man betrachtet alle verschiedenen Möglichkeiten, die Anzahl  $A(i,j)$  der noch vorhandenen Schwingungen  $(i,j)$  auf die verbleibenden möglichen Positionen  $C(i,j)$  zu verteilen. Wie wahrscheinlich ist es, daß auf die momentan betrachtete Position von  $C(i,j)$  genau  $k$  Schwingungen  $(i,j)$  entfallen, für  $k = 0,1,\dots,A(i,j)$  ?

Um die Notation zu vereinfachen setzen wir  $S = A(i,j)$  und  $P = C(i,j)$ .

Es gibt  $\binom{P+S-1}{S}$  verschiedene Kombinationen, die  $S$  gleichen Schwingungen  $(i,j)$  auf  $P$  mögliche Positionen zu verteilen.

Z.B. für  $P = 2$  und  $S = 3$  gibt es 4 Möglichkeiten:

1. Position	2. Position
3	0
2	1
1	2
0	3

Liegen in der momentan betrachteten Position bereits  $k$  Schwingungen  $(i,j)$ , so gibt es für die restlichen  $S - k$  Schwingungen  $(i,j)$  noch  $P - 1$  verschiedene Positionen, also insgesamt

$$\binom{P - 1 + S - k - 1}{S - k} \text{ verschiedene Kombinationen.}$$

Damit ergibt sich die Wahrscheinlichkeit  $W$ , daß  $k$  Schwingungen  $(i,j)$  in die momentan belegte Position gelegt werden, zu

$$W(X = k) = \frac{\binom{P + S - k - 2}{S - k}}{\binom{P + S - 1}{S}} .$$

Die Wahrscheinlichkeiten  $W(X = k)$  für  $k = 0, 1, \dots, S-1$  lassen

$$\text{sich rekursiv bestimmen: } W(X = 0) = \frac{P - 1}{S + P - 1} ,$$

$$W(X = k + 1) = W(X = k) \frac{S - k}{S + P - k - 2} .$$

Dies ist eine verallgemeinerte hypergeometrische Verteilung.

Für  $P = 3$  und  $S = 3$  erhält man z.B.:

$$W(X = 0) = 0,4$$

$$W(X = 1) = 0,3$$

$$W(X = 2) = 0,2$$

$$W(X = 3) = 0,1$$

Das Intervall  $[0,1)$  des oben beschriebenen Zufallsgenerators wird gemäß der obigen Verteilung aufgeteilt. Die Anzahl  $k$  der auszugebenden Schwingungen  $(i,j)$  ergibt sich dann aus dem Abschnitt im Intervall  $[0,1)$ , in das die Zufallszahl fällt.

Lautet eine Zufallszahl z.B. 0,657, so würde für das obige Beispiel

$k = 1$  gesetzt werden, also eine Schwingung  $(i,j)$  ausgegeben werden, da  $0,4 < 0,657 < 0,7$  ist.

Um zu demonstrieren, wie gut die Theorie mit der Praxis übereinstimmt, wurden 10000 Rekonstruktionen aus der unsymmetrischen Rainflowmatrix nach Abb.15d bestimmt. Abb.15e zeigt die 15 verschiedenen Rekonstruktionen und Abb.15f die Verteilung auf die einzelnen Rekonstruktionen.

Zur Initialisierung wurden die natürlichen Zahlen von 1 bis 10000 gewählt. Man erkennt, daß die theoretisch geforderte Gleichverteilung auf alle Möglichkeiten sich sehr gut einstellt. Dies kann man durch den Chiquadrattest bestätigen.

#### 4. VERGLEICH DER INVERSIONSVERFAHREN

Im Kapitel 4.1 werden die Rekonstruktionsverfahren aus der Markov-Matrix nach /1/ mit dem von uns vorgeschlagenen Markov-residuum-Verfahren verglichen. Kapitel 4.2 vergleicht die Inversionen aus dem Rainflow-Verfahren mit denen aus dem Markov-residuum-Verfahren. Im Kapitel 4.3 werden auf der Basis gemessener Beanspruchungszeitfunktionen am PKW die verschiedenen Inversionsverfahren im statistischen Sinne miteinander verglichen, wobei als Maßstab die Lebensdauer im Kerbgrund dient, die nach dem örtlichen Konzept /5/ berechnet wird.

##### 4.1 MARKOV- UND MARKOV-RESIDUUM-VERFAHREN

Bei der Rekonstruktion aus der Markov-Matrix nach /1/ wird davon ausgegangen, daß der Startpunkt der BAZF und der Endpunkt in dieselbe Klasse fallen, d.h. es handelt sich um den im Abschnitt 3.1 behandelten Fall I.a.

Um unser Verfahren mit dem von /1/ vergleichen zu können, müssen wir zusätzlich noch erklären, was wir unter einem maximalen Baum bzw. maximalen Residuum zu einer Markov-Matrix verstehen. Dies ist ein Baum, der am wenigsten in die Tiefe geht, d.h. zu jedem Knoten wird ein kürzester Weg zum Baumendpunkt bestimmt. In Abb.8 sind  $V_2$  und  $V_3$  maximale Bäume.

Das Rekonstruktionsverfahren nach /1/ geht nun so, daß zunächst ein maximaler Baum bestimmt wird. Diese Bestimmung ist kanonisch, d.h. unter allen möglichen maximalen Bäumen wird nicht zufällig



einer ausgesucht, sondern deterministisch einer konstruiert. Dann wird mit zwei Zufallsgeneratoren pro Zeile die Matrix abgearbeitet. Die Anfangsbedingungen dieser Zufallsgeneratoren sind so gewählt, daß die jeweiligen letzten Übergänge so stattfinden, wie sie durch den vorgegebenen Baum bestimmt sind. Diese Verfahrensweise hat gewisse Nachteile:

1. Nur ein kleiner Teil aller möglichen BAZF kann rekonstruiert werden, und bei jeder Wiederholung entsteht stets dieselbe Rekonstruktion.
2. Da die Vorgabe eines Markov-Residuums gewisse Charakteristika festschreibt und bei /1/ weder mit einem zufälligen Markov-Residuum noch mit dem eigentlich zu der BAZF gehörenden Markov-Residuum gearbeitet wird, werden gewisse Grundeigenschaften der gegebenen BAZF im Sinne der Markov-Zählung i.a. verfälscht.
3. Durch die mehr oder weniger deterministische Bestimmung der Anfangsbedingungen der einzelnen Zufallsgeneratoren können beim Abarbeiten der Markov-Matrix starke Korrelationen zwischen einzelnen Zeilen auftreten, insbesondere wenn die Zeilen sehr ähnlich sind. Durch diesen Effekt werden i.a. globale Eigenschaften der gegebenen BAZF verfälscht wiedergegeben.

Aufgrund all dieser Überlegungen schlagen wir vor, bereits bei der Markov-Zählung das Markov-Residuum mitzuzählen, um damit die Information über die vorgegebene BAZF um einen wichtigen Teil zu erhöhen und dann beim Abarbeiten mit einem einzigen Zufallsgenerator zu arbeiten.

Die Markov-Matrix nach Abb.8

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

für die es insgesamt 7 Inversionen bei vier verschiedenen Bäumen gibt, wobei es dabei zwei maximale Bäume gibt, läßt sich also nach dem Inversionsverfahren nach /1/ nicht rekonstruieren. Damit eine Rekonstruktion möglich wird, muß die Schwingung (3,1) zur Matrix hinzugefügt werden. Es ergibt sich damit

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Für diese Matrix gibt es insgesamt 14 Rekonstruktionen, die mit dem Wert 1 starten, mit 4 verschiedenen in 1 einlaufenden Bäumen, bei denen es sich in zwei Fällen um maximale handelt (Abb.12). Mit dem uns zur Verfügung stehenden Programm des Verfahrens nach /1/ erhält man aus einer Matrix immer nur eine Rekonstruktion, die für das Beispiel in Abb.12 angegeben ist. Es ist eine BAZF, die es bei der ursprünglichen Rekonstruktion nach Abb.8 nicht gibt.

## 4.2 MARKOV-RESIDUUM UND RAINFLOW

Abb. 13 und 14 zeigen für zwei bisher betrachtete BAZF (Abb.2,8) die Rekonstruktionen nach Markov-Residuum und nach dem unsymmetrischen und dem symmetrischen Rainflow-Verfahren. Die Anzahl der möglichen Rekonstruktionen lagen beim Markov-Residuum- und dem unsymmetrischen Rainflow-Verfahren meistens in gleicher Größenordnung. Die Rekonstruktion aus der symmetrischen Rainflow-Matrix liefert dagegen häufig um Größenordnungen mehr rekonstruierte BAZF. So ergeben sich z.B. aus der symmetrischen Rainflow-Matrix, die zur BAZF nach Abb.9 gehört 112 BAZF, während es im unsymmetrischen Fall nur 3 Rekonstruktionsmöglichkeiten gibt.

Im folgendem werden anhand der BAZF, (Abb.15a-f)

9 10 7 32 20 32 10 22 20 23 9 21 1 6 2 22 20 21 20 21

etwas detaillierter die Rekonstruktionsverfahren miteinander verglichen. Die möglichen 15 Rekonstruktionen nach dem unsymmetrischen Rainflow-Verfahren und die 12 BAZF aus dem Markov-Residuum-Verfahren zeigt Abb.15e.

Für die Lebensdauer von Bauteilen unter stochastischer Beanspruchung spielen

- die Reihenfolge großer Lastwechsel und
- die Mittellastverschiebungen

eine große Rolle. Aus diesem Grund betrachten wir bei der obigen BAZF die Teillastfolge (32 20 32) und fragen danach, wie gut

diese Teillastfolge bei den einzelnen Rekonstruktionen wiedergegeben wird. Aus Abb. 15e erkennt man, daß bei der Rekonstruktion aus der unsymmetrischen Rainflow-Matrix in 12 von 15 Fällen die Teilfolge (32 20 32) exakt rekonstruiert wird und daß bei den restlichen 3 Fällen kein Wert kleiner 20 auftritt. Bei der Rekonstruktion aus dem Markov-Residuum-Verfahren werden 4 von 12 Fällen (32 20 32) exakt wiedergegeben; in 7 Fällen wird das lokale Minimum 20 der Teilfolge (32 20 32) unterschritten, und zwar tritt als lokales Minimum in 6 Fällen 1 (Abb. 15b) und einmal 9 auf. Diese Tendenz gilt für die rekonstruierten BAZF aus der Markov-Matrix allgemein, d.h., es werden große Schwingungen mit kleineren Zwischenschwingungen in mehrere große Schwingungen zerlegt und umgekehrt. Dies hat zur Folge, daß im ersten Fall die mittlere Lebensdauer der aus der Markov-Matrix rekonstruierten BAZF kleiner ist als bei der entsprechenden Rekonstruktion aus dem Rainflow-Verfahren (s. Abschnitt 4.4).

Abschließend zu diesem Beispiel wird noch verglichen, welche Ergebnisse das Markov-Verfahren mit allen Residuen, sowie das Rekonstruktionsverfahren mit "maximalem Baum" nach /1/ liefern. Man sieht leicht, daß es für die Markov-Matrix (Abb. 15c) obiger BAZF (Abb. 15a) sechs verschiedene Markov-Residua, d.h. einlaufende Bäume in  $21^+$ , gibt. Das zur BAZF gehörige Residuum ist  $(21^+, 21^+, 10^-)$ , wobei wir nur die Nachfolger von  $9^-$ ,  $20^-$  und  $32^+$  aufführen, da sich alle anderen Nachfolger in eindeutiger Weise aus der Markov-Matrix ablesen lassen. Die folgende Tabelle zeigt alle Bäume:

RESIDUUM	REKONSTRUKTIONEN	MITTLERER MAXIMAABSTAND (32 - 32)	LOKALES MINIMUM =
21 <sup>+</sup> 21 <sup>+</sup> 10 <sup>-</sup>	12	7	41,7 %
21 <sup>+</sup> 23 <sup>+</sup> 10 <sup>-</sup>	6	6	50 %
21 <sup>+</sup> 21 <sup>+</sup> 20 <sup>-</sup>	12	9	0 %
21 <sup>+</sup> 23 <sup>+</sup> 20 <sup>-</sup>	6	8	0 %
10 <sup>+</sup> 21 <sup>+</sup> 10 <sup>-</sup>	12	5,3	41,7 %
10 <sup>+</sup> 21 <sup>+</sup> 20 <sup>-</sup>	12	7,3	0 %
MARKOV	60	7,13	21,7 %

Der "maximale Baum" ist hier (21<sup>+</sup>, 21<sup>+</sup> 20<sup>-</sup>), d.h. mit dem in /1/ beschriebenen Verfahren beträgt der durchschnittliche Abstand der Maxima 9 und in jedem Fall ist das lokale Minimum zwischen den beiden Maximalwerten 32 kleiner als 11, statt 20 bei der Original-BAZF.

Vergleichen wir noch einmal alle vier Verfahren in einer Tabelle.

VERFAHREN	REKONSTRUKTIONEN	MITTLERER ABSTAND (32 - 32)	LOKALES MINIMUM = 20
RAINFLOW UNSYMM.	15	2,4	100 %
RAINFLOW SYMM.	576	2,625	100 %
-----			
MARKOV-RESIDUUM	12	7	41,7 %
MARKOV-MAX.-BAUM /1/	12	9	0 %
MARKOV	60	7,13	21,7 %

Aus dieser Tabelle kann man die Vorteile des Rainflow-Verfahrens gegenüber dem Markov-Residuum- und erst recht gegenüber dem Markov-Verfahren deutlich ablesen. Der Abstand zwischen den beiden Maximalwerten 32 liegt bei der unsymmetrischen Rainflow-Rekonstruktion im Mittel bei 2,4, beim symmetrischen bei 2,625, d.h. nur unwesentlich über dem wirklichen Wert 2, bei den Markov-Rekonstruktionen liegt dieser Wert zwischen 7 und 9. Vom Standpunkt der Betriebsfestigkeit aus gesehen ist wie oben schon formuliert, die Größe des lokalen Minimums zwischen den beiden Maximalwerten wichtig. Bei den Rainflow-Rekonstruktionen erhält man wie bei der vorgegebenen BAZF immer 20 als lokales Minimum. Dies ist bei der Rainflow-Rekonstruktion immer der Fall, wenn der Maximalwert der BAZF genau zweimal auftritt. Bei der Rekonstruktion aus dem Markov-Residuum-Verfahren liegt dieser Anteil bei 41,7%, bei Markov mit allen Residuen nur bei 21,7%

und beim Markov nach /1/ bei 0% .

Wie die erste Spalte der Tabelle zeigt, liegt die Wahrscheinlichkeit, aus dem Markov-Residuum-Verfahren die originale BAZF exakt zu rekonstruieren, bei 1/12 und beim unsymmetrischen Rainflow-Verfahren bei 1/15. Es weichen jedoch die 14 "falschen" Rainflow-Rekonstruktionen im Mittel weniger von der wirklichen BAZF ab als die 11 "falschen" Markov-Residuum-Rekonstruktionen. Bei der Markov-Rekonstruktion ohne mitgezähltem auslaufenden Baum ist die exakte Rekonstruktion mit 1/60 recht gering. Beim Markov-Verfahren mit "maximalem Baum" läßt sich die vorgegebene BAZF überhaupt nicht rekonstruieren.

Vergleicht man die Rekonstruktionen aus der unsymmetrischen mit denen aus der symmetrischen Rainflow-Matrix, so besteht der wesentliche Unterschied in der Anzahl der möglichen Rekonstruktionen; bei der unsymmetrischen gibt es 15, bei der symmetrischen 576 verschiedene BAZF. Dabei sind die 15 unsymmetrischen Rekonstruktionen eine Teilmenge der 576 symmetrischen und zwar genau die, bei denen die Zusatzinformation, ob eine Hysteresisschleife im aufsteigenden oder abfallenden Ast eliminiert worden ist, berücksichtigt worden ist. Dies bedeutet eine Einengung der Lebensdauerstreuung (s.4.4) und damit eine Erhöhung der Rekonstruktionsgüte.

Um ein Gefühl für die Anzahl der Rekonstruktionsmöglichkeiten zu bekommen, betrachten wir folgende unsymmetrische Rainflow-Matrix:

	1	2	3	4	.	.	.	n-1	n
1	0	1	1	1	.	.	.	1	0
2	1	0	1	1	.	.	.	1	0
3	1	1	0	1	.	.	.	1	0
	.	.	.	.				.	.
	.	.	.	.				.	.
n-1	1	1	1	1	.	.	.	0	0
n	1	1	1	1	.	.	.	1	0

und das Residuum (1,n).

Die letzte Spalte der Matrix enthält nur Nullen, da die Matrix sonst nicht abarbeitbar wäre. Für  $n = 2$  hat die Matrix die Gestalt:

	1	2
1	0	0
2	1	0

Die Anzahl der Rekonstruktionen ist 1, da es nur eine Möglichkeit gibt, die Schwingung (2,1) in das Residuum (1,2) zu legen.



Für  $n = 3$ :

	1	2	3
1	0	1	0
2	1	0	0
3	1	1	0

gibt es 2 verschiedene Rekonstruktionen, und zwar

(1 2 1 3 2 3 1 2 1 3) und

(1 2 1 3 1 2 1 3 2 3).

Bei  $n = 4$  gibt es bereits 288 Rekonstruktionsmöglichkeiten aus der unsymmetrischen Rainflow-Matrix. Die folgende Tabelle zeigt die Anzahl der Rekonstruktionsmöglichkeiten bis  $n = 9$ :

n	ANZAHL
2	1
3	2
4	288
5	140894208
6	1,4 E 19
7	2,2 E 37
8	3,8 E 64
9	6,3 E 102

Diese Tabelle verdeutlicht, daß selbst bei "harmlos" aussehenden Matrizen und kurzem Residuum die Anzahl der Rekonstruktionsmöglichkeiten unvorstellbar groß ist. Im obigen Beispiel wächst sie schneller als exponentiell in der Anzahl der Elemente  $(n - 1)^{**} 2$  der Matrix. Man vergegenwärtige sich, daß bei einem geschätzten Alter des Weltalls von 10 Milliarden Jahren eine Milliarde Computer, die jeweils in der Lage sind, eine Billion Rekonstruktionen pro Sekunde zu erzeugen, seit dem Urknall bis heute erst 3 E38 Rekonstruktionen geschafft hätten, d.h. einen verschwindend kleinen Bruchteil aller Möglichkeiten für  $n = 8$ . Es sollte erwähnt werden, daß beim symmetrischen Rainflow-Verfahren die Zahlen noch wesentlich schneller wachsen. Zum Beispiel ist für  $n = 4$  die Anzahl 3780 statt 288, wenn man die Matrix symmetrisiert.

Diese große Anzahl sollte allerdings nicht als Argument gegen die Verwendung des Rainflowalgorithmus vorgebracht werden, denn auch bei der Markov-Rekonstruktion wächst die Zahl der Rekonstruktionen ähnlich schnell.

#### 4.3 SPEICHERPLATZ UND RECHENZEITEN

Vergleicht man zunächst das Zählen einer BAZF mit Rainflow-, Markov- und Markov-Residuum-Verfahren, so stellt man fest, daß bei vorgegebener Klassenzahl  $n$  (z.B. 32) alle drei vom benötigten Speicherplatz her fast identisch sind.

$$\text{Rainflow:} \quad n^2 + 2n - 1$$

$$\text{Markov:} \quad n^2$$

$$\text{Markov-Residuum:} \quad n^2 + 2n - 2$$

Dabei wurden die nicht benötigten Diagonalelemente mitgezählt. Bei der nach Abb. 1 gemessenen Zeitfunktion handelt es sich um eine Meßzeit von 15 Minuten bei einer Aufnahmefrequenz von 100 Hz. Bei  $n = 32$  Klassen ergeben sich 1417 Umkehrpunkte. Mit den noch nicht auf Geschwindigkeit optimierten Programmen ergeben sich im Mittel folgende Rekonstruktionsfrequenzen auf einer VAX 750:

Rekonstruktionsverfahren	Rekonstruktionsfrequenz der Umkehrpunkte
unsymmetrische Rainflow-Matrix	350 Hz
symmetrische Rainflow-Matrix	700 Hz
Markov-Residuum	1500 Hz

Das auf Geschwindigkeit optimierte Programm zur Rekonstruktion aus der Markov-Matrix nach /1/, liefert eine Rekonstruktionsfrequenz der Umkehrpunkte für dasselbe Beispiel nach Abb.1 von 1800 Hz. Mit auf Geschwindigkeit optimierten Programmen erwarten wir, daß sich die Rekonstruktionsfrequenzen in obiger Tabelle mindestens verdoppeln.

Bei der Rainflow-Inversion steigern sich die Rekonstruktionsfrequenzen mit wachsender Belegung der Matrixelemente, da es dann häufig vorkommt, daß mit einem Zufallswert viele Zwischenschwingungen ausgegeben werden; d.h. man kann erwarten, daß die Rekonstruktion aus einer "Bemessungs-Rainflow-Matrix" z.B. für 300 000 km Fahrstrecke schneller sein wird, als die entsprechenden Inversionen aus der Markov-Matrix.

#### 4.4 BEWERTUNG DER REKONSTRUKTIONSVERFAHREN DURCH LEBENSDAUERBERECHNUNGEN

Neben der Bewertung der Verfahren anhand von einfachen Zeitverläufen stellt sich für die Praxis die Frage, welche unterschiedlichen Auswirkungen die Rekonstruktionen auf die Lebensdauer von Bauteilen haben, denn ihr Sinn liegt ja gerade im experimentellen Lebensdauernachweis von Bauteilen. Folgende drei Effekte der äußeren Lastzeitfunktion (BAZF) beeinflussen die Bauteillebensdauer entscheidend:

- die Größe der örtlichen Hysteresisschleifen, daß sind die durch die Lastamplituden ausgelösten Spannungs-Dehnungsamplituden am Ort der höchsten Beanspruchung
- die Lage der örtlichen Hysteresisschleifen, d.h., die durch die Größe und Reihenfolge der Umkehrpunkte der Lastzeitfunktion verursachten örtlichen Mittelspannungen und Mitteldehnungen der Hysteresisschleifen. Dies wird als spannungsmechanischer Reihenfolgeeinfluß bezeichnet
- die Schädigungswirkung der Hysteresisschleifen, die von der Reihenfolge ihres Auftretens abhängt (nichtlineare Schadensakkumulation).

Die beste Bewertung der verschiedenen Inversionsverfahren wären statistisch abgesicherte Versuchsreihen an Bauteilen mit den rekonstruierten Lastzeitfunktionen, was einen großen Aufwand bedeuten würde.

Der Einfluß der Hysteresisschleifengröße läßt sich durch

Lebensdauerberechnungen nach dem "Nennspannungskonzept" /6/ abschätzen, wenn man die äußeren Lastzeitfunktionen nach dem Spannenpaarverfahren klassiert, da dann zwischen den äußeren Lastamplituden und der Größe der örtlichen Hysteresisschleife ein eindeutiger Zusammenhang besteht.

Größen- und zusätzlich Lageneinfluß der Hysteresisschleifen lassen sich durch Lebensdauerberechnungen nach dem "örtlichen Konzept" /5/ ermitteln, da dort der spannungsmechanische Reihenfolgeeinfluß voll berücksichtigt wird.

Die Vernachlässigung des Reihenfolgeeinflusses der Schädigungswirkung erscheint vertretbar. In /7/ wird anhand von Versuchsreihen gezeigt, daß dieser Reihenfolgeeinfluß nicht signifikant ist.

Für die Lebensdauerberechnung nach dem Nennspannungskonzept benötigt man neben dem Lastkollektiv nach dem Spannenpaarverfahren die Bauteilwöhlerlinie. Die Spannenpaarkollektive kann man aus der Rainflow-Matrix ableiten; sie ergeben sich aus den Nebendiagonalsummen der Rainflow-Matrix. Für die Lebensdauerberechnung wird die lineare Schadensakkumulationshypothese nach Palmgren-Miner zugrunde gelegt. Bei dieser Lebensdauerberechnung wird nur die Größe aber nicht die Lage der örtlichen Hysteresisschleifen berücksichtigt.

Bei der Lebensdauerberechnung nach dem "örtlichen Konzept" werden geschlossene Hysteresisschleifen nach Größe und Lage ermittelt. Deren schädigende Wirkung wird mit Hilfe von "Schädigungsparameter-Wöhlerlinien" ermittelt und zu einer Schadenssumme akkumuliert, aus der sich die Lebensdauer ergibt.

Das Flußdiagramm nach Abb.16 zeigt die einzelnen Schritte, wie man zu der Lebensdauerverteilung  $P = P(L_i/L_0)$  kommt.  $L_0$  ist die Lebensdauer, die sich aus der gemessenen Beanspruchungszeitfunktion ergibt.  $L_i$  ist die entsprechende Lebensdauer der i-ten Rekonstruktion aus der Rainflow- bzw. Markov-Matrix, die zu der gemessenen BAZF gehören.

Die Lebensdauerberechnungen wurden für die Werkstoffe StE 690 und X10CrNiTi 1810 mit einem Kerbfaktor von 2,5 durchgeführt, wobei die maximalen Werte der Lastzeitfunktion  $F(t)$  unterhalb der zyklischen Fließlast lagen und als Schädigungsparameter der nach Smith, u.a./8/ verwendet wurde.

Je dichter die Werte  $L_i/L_0$  bei 1 liegen und je kleiner vor allem die Streuungen sind, desto besser ist das jeweilige Rekonstruktionsverfahren. Für die BAZF nach Abb.15a ergeben sich folgende Werte:

	Lebensdauerverhältnis $L_i/L_0$ aus Nennspannungskonzept	
	X10CrNiTi 1810	StE 690
Markov-Residuum	0,46 ... 1	0,05 ... 1
symm. Rainflow	1	1
unsymm. Rainflow	1	1

	Lebensdauerverhältnis $L_i/L_0$ aus örtlichem Konzept	
	X10CrNiTi 1810	StE 690
Markov-Residuum	0,090 ... 1,095	0,016 ... 1,014
symm. Rainflow	0,902 ... 1,000	0,978 ... 1,000
unsymm. Rainflow	0,999 ... 1,000	0,999 ... 1,000

Bei der Lebensdauerberechnung nach dem Nennspannungskonzept muß bei den Rekonstruktionen aus der Rainflow-Matrix immer  $L_i/L_0 = 1$  sein, da sich immer das gleiche Spannenpaarkollektiv ergibt, da es sich aus der Rainflow-Matrix ableiten läßt.

Die Rekonstruktionen aus der Markov-Matrix zeigen große Unterschiede. Für den Werkstoff StE 690 liegen z.B. die Werte zwischen 0,05 und 1. Die Ursache dafür ist die Tatsache, daß bei den Rekonstruktionen aus der Markov-Matrix größere Hysteresisschleifen auftreten als bei der Original-BAZF. Dies wurde anhand der verschiedenen Rekonstruktionen (Abb.15) dargestellt.

Die Berücksichtigung der Lage der Hysteresisschleifen im Kerbgrund bei der Lebensdauerberechnung nach dem örtlichen Konzept liefert bei den Rekonstruktionen aus der Rainflow-Matrix Lebensdauerwerte dicht bei 1; bei den Rekonstruktionen aus der Markov-Matrix werden die Lebensdauerverhältniszahlen viel ungünstiger.



Für die in Abb.1 angegebene BAZF der Längskraft am PKW wurden die entsprechenden Lebensdauerberechnungen durchgeführt, um zu zeigen, wie sich diese prinzipiellen Effekte auf gemessene Beanspruchungszeitfunktionen auswirken. Abb.17 zeigt für den Werkstoff StE 690 die Verteilung der normierten Lebensdauer  $L_i/L_0$  im logarithmischen Gaußpapier. Man erkennt, daß die Lebensdauerwerte aus den Rekonstruktionen der Rainflow-Matrix praktisch nicht streuen und der Mittelwert bei 1 liegt. Bei den Rekonstruktionen aus der Markov-Matrix liegt der Mittelwert bei 0,51 und die logarithmische Streuung beträgt 0,256. In der folgenden Tabelle sind Mittelwert und logarithmische Streuung analog zum obigen Beispiel der BAZF nach Abb.15a für die gemessene BAZF nach Abb.1 angegeben.

Lebensdauerverteilung von  $L_i/L_0$

Nennspannungskonzept

	X10CrNiTi 1810		StE 690	
	Mittelwert	Streuung	Mittelwert	Streuung
Markov-Residuum	0,620	0,080	0,590	0,100
symm. Rainflow	1	0	1	0
unsymm. Rainflow	1	0	1	0

Lebensdauerverteilung von  $L_i/L_0$

örtliches Konzept

	X10CrNiTi 1810		StE 690	
	Mittelwert	Streuung	Mittelwert	Streuung
Markov-Residuum	0,597	0,113	0,510	0,256
symm. Rainflow	1,019	0,013	1,004	0,002
unsymm. Rainflow	1,019	0,007	1,001	0,0002

Man erkennt, daß bei den Rainflow-Inversionsverfahren der Mittelwert stets bei 1 liegt und die logarithmische Streuung sehr gering ist, wobei die Rekonstruktionen aus der unsymmetrischen Rainflow-Matrix immer die besten Ergebnisse liefern. Die Rekonstruktionen aus dem Markov-Residuum-Verfahren liefern für dieses Beispiel um den Faktor 2 zu kleine Lebensdauerwerte, wobei die Lebensdauerverteilungen durch sehr große Streuungen gekennzeichnet sind.

Das für die Praxis wichtige Ergebnis lautet:

- die rechnerische Lebensdauer im Kerbgrund aus Rekonstruktionen derselben unsymmetrischen Rainflow-Matrix streut sehr wenig, und der normierte Mittelwert liegt dicht bei 1. Daraus folgt, daß es für Bauteilprüfungen keine Rolle spielt, welche BAZF aus der unsymmetrischen Rainflow-Matrix rekonstruiert worden ist.
- Die entsprechende Lebensdauerverteilung aus Rekonstruktionen der Markov-Matrix, nur diese werden bisher in der Praxis verwendet, streuen um ca. eine Zehnerpotenz mehr und der normierte Mittelwert ist kleiner 1.

## 5. AUSBLICK

Es hat sich gezeigt, daß zur Ansteuerung von servohydraulischen Zylindern die Rekonstruktionen aus der unsymmetrischen Rainflow-Matrix am besten geeignet sind, die Lebensdauer eines Bauteils unter stochastischer Beanspruchung im Labor zu bestimmen. Um dies aus einer " Bemessungs-Rainflow-Matrix ", z.B. für 300 000 km durchführen zu können, müssen folgende Aufgaben gelöst werden:

- Wie superponiert man unsymmetrische Rainflow-Matrizen?
- Wie extrapoliert man unsymmetrische Rainflow-Matrizen?
- Welche Bedingungen muß eine superponierte und extrapolierte, unsymmetrische Rainflow-Matrix erfüllen, damit eine vollständige Inversion möglich ist?

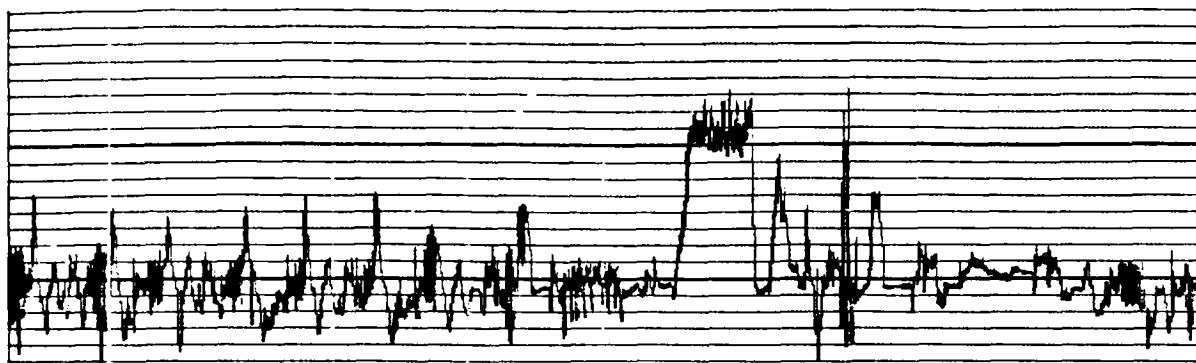
Über die Lösung dieser Aufgaben wird demnächst berichtet werden /9/.

## 6. LITERATURVERZEICHNIS

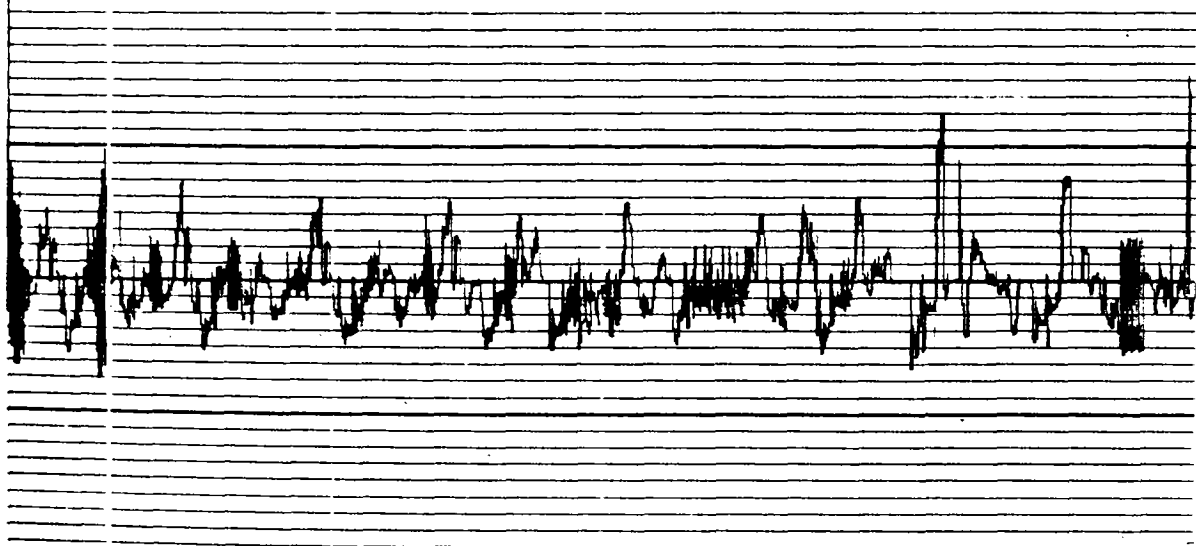
- /1/ R.Fischer,H.Körber,U.Wendt:Synthese zufallsartiger Lastfolgen zur Anwendung bei Betriebsfestigkeitsversuchen  
VDI-Fortschrittsbericht VDI-Z Reihe 5 Heft 40,1979.
- /2/ J.B. de Jonge:Counting Methods for the Analysis of  
Load-Time-Histories. National Aerospace Laboratory NLR.  
Memo.SB.80/106/U,NLR Holland,1980
- /3/ F.A.Conle:An Examination of Variable Amplitude Histories  
in Fatigue.Ph.D.Thesis,University of Waterloo,Canada,1979
- /4/ S.Harary,E.M.Palmer:Graphical Enumeration.New York,London  
1973,Academic Press.
- /5/ J.W.Bergmann,T.Seeger:Über neuere Verfahren der Anriß-  
lebensdauervorhersage für schwingbelastete Bauteile auf  
der Grundlage örtlicher Beanspruchungen.Z.-Werkstoff-  
technik 8,S.89-100,1977.
- /6/ N.N.:Leitfaden für eine Betriebsfestigkeitsrechnung,  
VDEh,Arbeitsgemeinschaft Betriebsfestigkeit,Bericht  
ABF 01 R,Düsseldorf,1979.
- /7/ G.Schweiger:Statistischer Größeneinfluß bei unregel-  
mäßiger Schwingbelastung.Dissertation Hochschule der  
Bundeswehr,München,1983.

- /8/ K.N.Smith,P.Watson,T.H.Topper:A Stress-Strain-Function  
for the Fatigue of Metals.Journal of Material,JMLSA,  
Vol:5,No.4 (1970).
- /9/ W.Krüger,J.Petersen:Rekonstruktion von stochastischen  
Beanspruchungszeitfunktionen aus extrapolierten Rain-  
flow-Matrizen.9.GESA Symposium Berlin,Mai 1985.
- /10/ L.Afflerbach:Lineare Kongruenzgeneratoren zur Erzeugung  
von Pseudo-Zufallszahlen und ihre Gitterstruktur.Diss.  
Darmstadt,1983.

## *Seitenkraft*



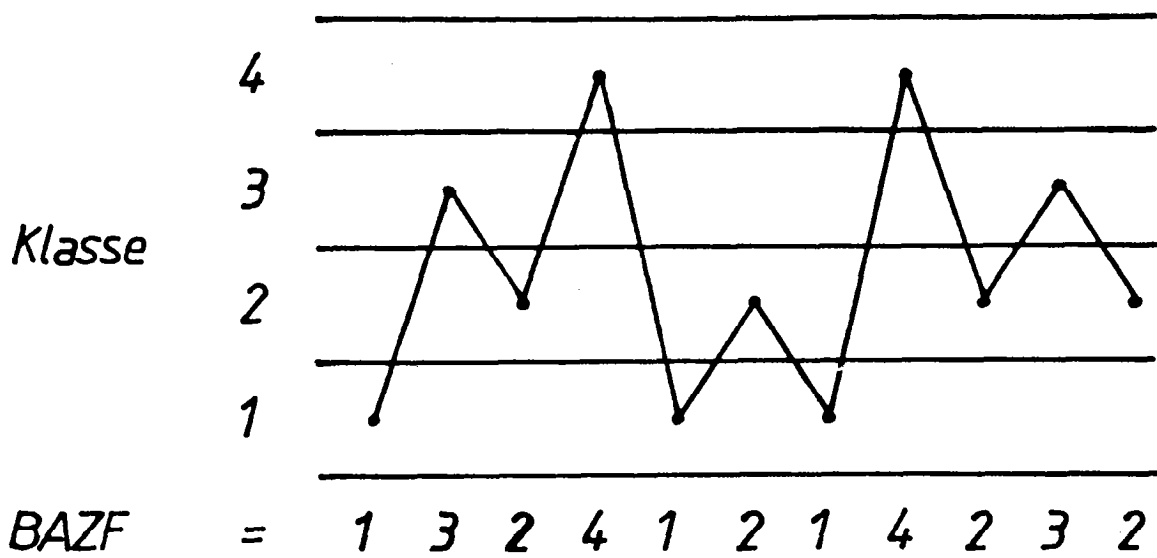
## *Längskraft*



*Gemessene BAZF am PKW*

*Abb. 1*

# Umkehrpunkte



nach Klasse  $j$



$j =$  1 2 3 4

von Klasse  $i \rightarrow$

$i =$  1

2

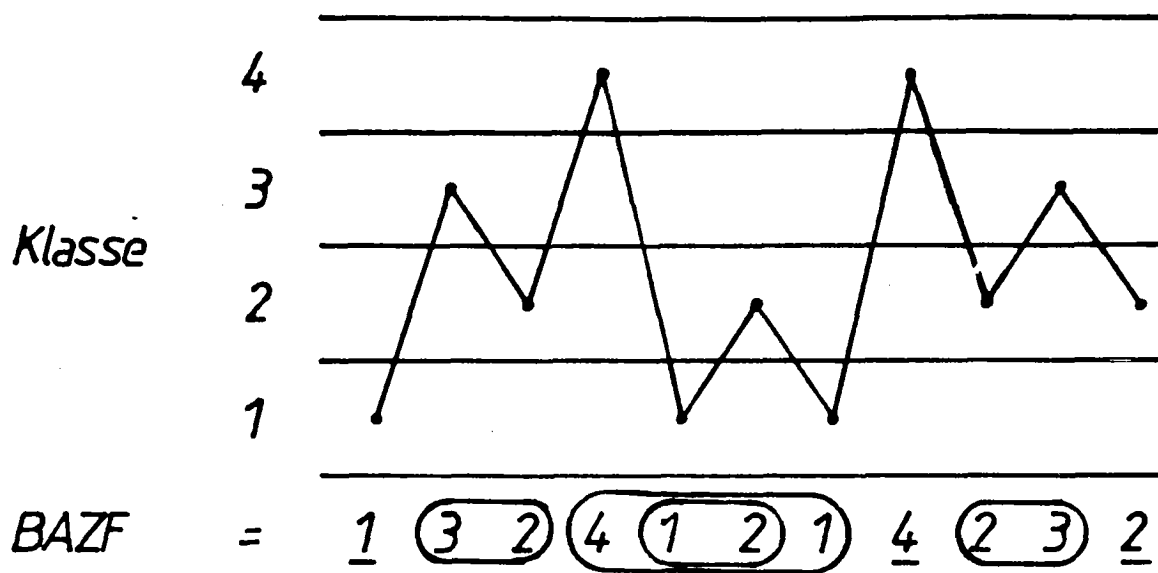
3

4

0	1	1	1
1	0	1	1
0	2	0	0
1	1	0	0



## Umkehrpunkte



Residuum  $V = (\underline{1}, \underline{4}, \underline{2})$

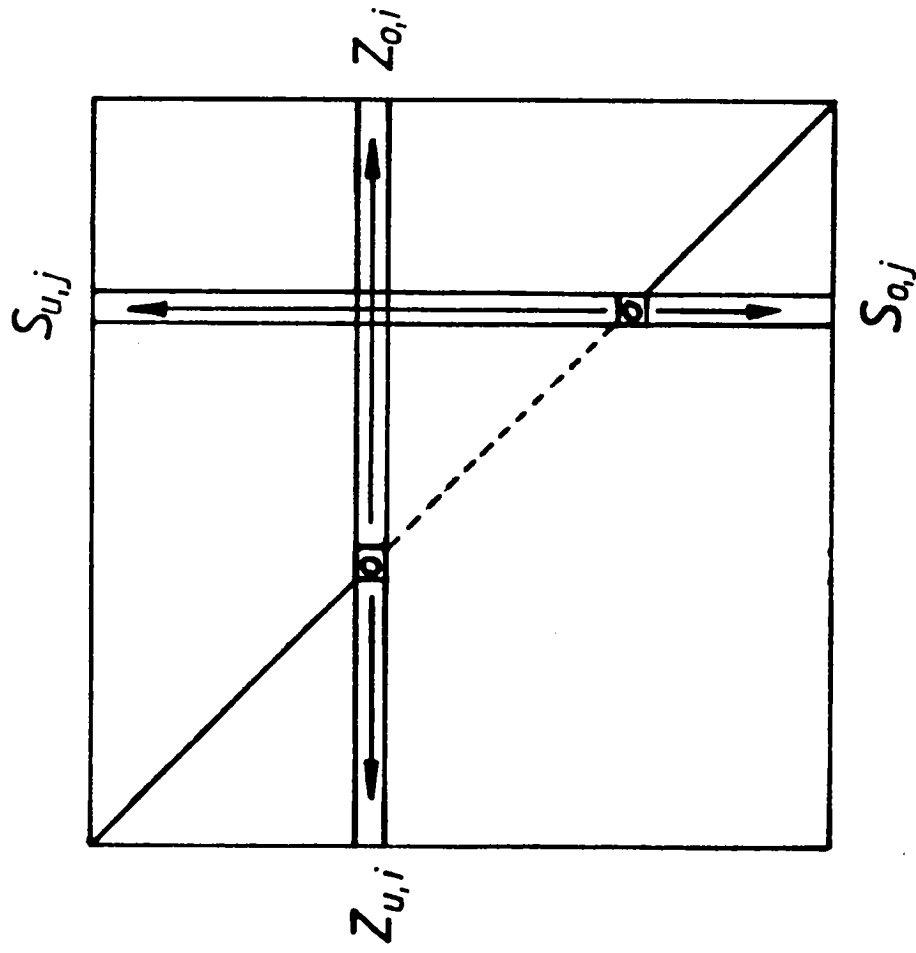
## Rainflow-Matrix

unsymmetrisch

	1	2	3	4
1	0	1	0	0
2	0	0	1	0
3	0	1	0	0
4	1	0	0	0

symmetrisch

	1	2	3	4
1	0	1	0	1
2	1	0	2	0
3	0	2	0	0
4	1	0	0	0



$$Z_{o,i} = \sum_{j=1}^n P_{ij}$$

alle Schwingungen aus Klasse i

$$Z_{u,i} = \sum_{j=1}^i P_{ij}$$

$$S_{o,j} = \sum_{i=1}^n P_{ij}$$

$$S_{u,j} = \sum_{i=1}^j P_{ij}$$

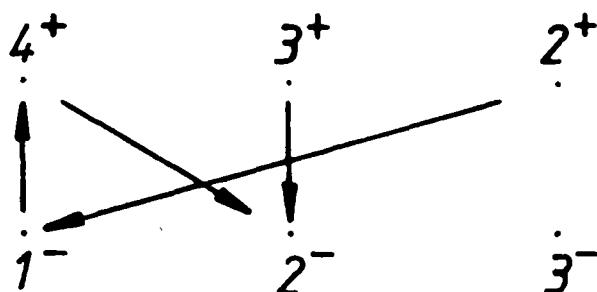
alle Schwingungen in Klasse j

Markov-Matrix  $P = (p_{ij})$

Abb. 4

BAZF = ( 1 3 2 4 1 2 1 4 2 3 2 )

		Aufwärtshalbschwingung			Abwärtshalbschwingung		
		von			von		
nach		1	2	3	2	3	4
$V^{(0)}$		0	0	0	0	0	0
$V^{(1)}$		3	0	0	0	0	0
$V^{(2)}$		3	0	0	0	2	0
$V^{(3)}$		3	4	0	0	2	0
$V^{(4)}$		3	4	0	0	2	1
$V^{(5)}$		2	4	0	0	2	1
$V^{(6)}$		2	4	0	1	2	1
$V^{(7)}$		4	4	0	1	2	1
$V^{(8)}$		4	4	0	1	2	2
$V^{(9)}$		4	3	0	1	2	2
$V^{(10)}$		4	3	0	1	2	2
$V$		4	0	0	1	2	2



$V = ( 4, 0, 0, 1, 2, 2 )$

Markov-Matrix

$P =$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Residuum

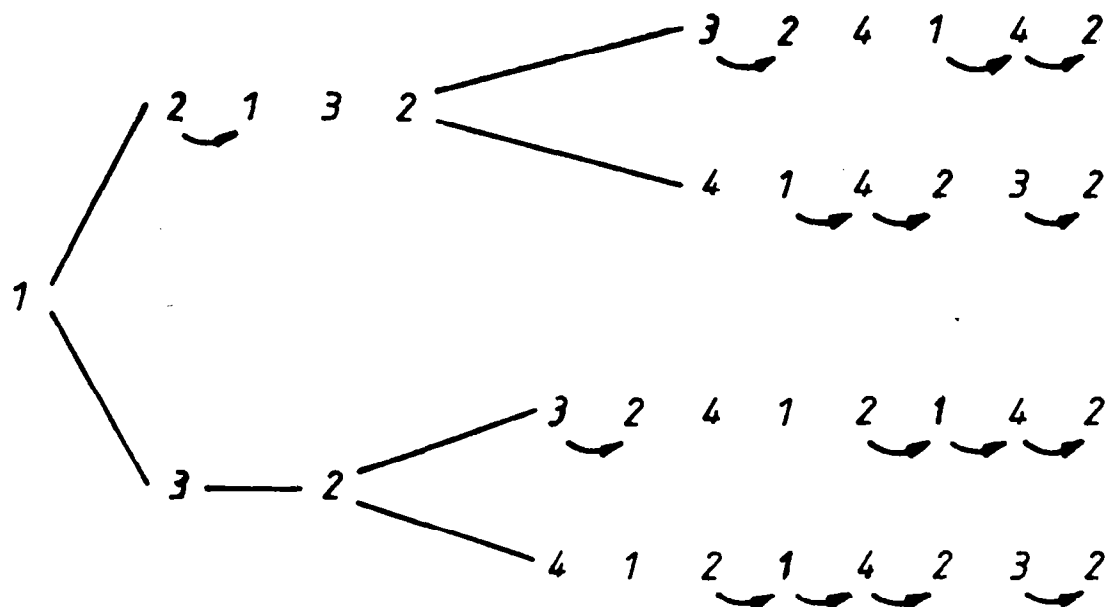
$V = (4, 0, 0, 1, 2, 2)$

$1^- \longrightarrow 4 \quad 2^+ \longrightarrow 1 \quad 3^+ \longrightarrow 2 \quad 4^+ \longrightarrow 2$

$P-V =$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

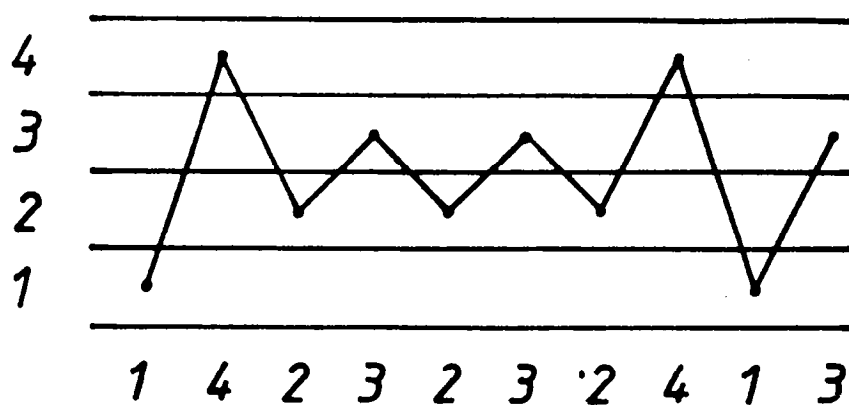
alle Rekonstruktionen



Markov-Rekonstruktion  
mit Residuum

Abb. 6

## Umkehrpunkte

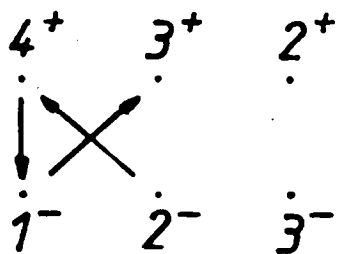


## Markov-Matrix $P$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

## Markov-Residuum $V$

$$V = (3, 4, 0, 0, 0, 1)$$



## Rekonstruktionen

1 4 2 3 2 3 2 4 1 3

Markov-Rekonstruktion  
mit Residuum

Abb. 7

Markov-Matrix

$P =$

0	0	1	1
0	0	2	1
0	2	0	0
1	1	0	0

Residua

Rekonstruktionen

$$V_1 = (3, 4, 0, 0, 0, 1)$$

$$V_2 = (3, 3, 0, 0, 0, 1) \text{ max. Baum}$$

$$V_3 = (3, 3, 0, 0, 0, 2) \text{ max Baum}$$

$$V_4 = (4, 3, 0, 0, 0, 2)$$

1	4	2	3	2	3	2	4	1	3
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

1	4	2	4	1	3	2	3	2	3
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

1	4	2	3	2	4	1	3	2	3
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

1	4	1	3	2	3	2	4	2	3
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

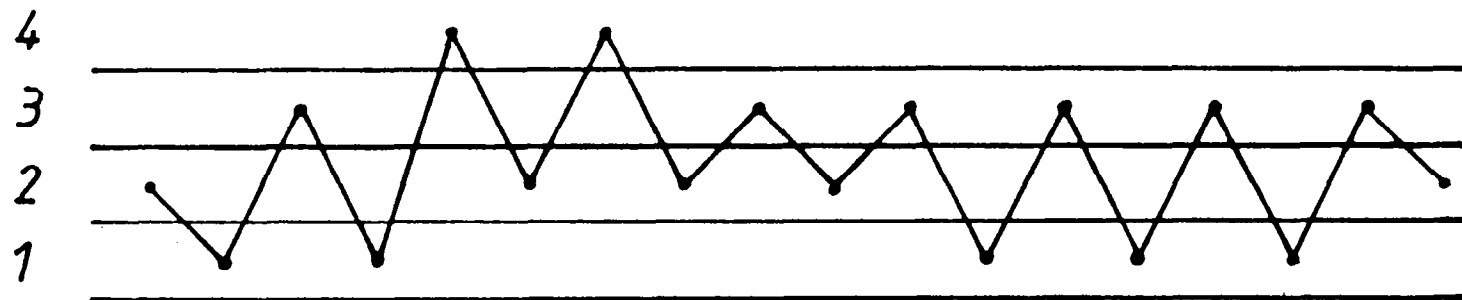
1	4	1	3	2	4	2	3	2	3
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

1	3	2	3	2	4	1	4	2	3
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

1	3	2	4	1	4	2	3	2	3
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Markov-Rekonstruktion mit allen Residuen

Abb. 8



unsymmetrische  
Rainflow-Matrix

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

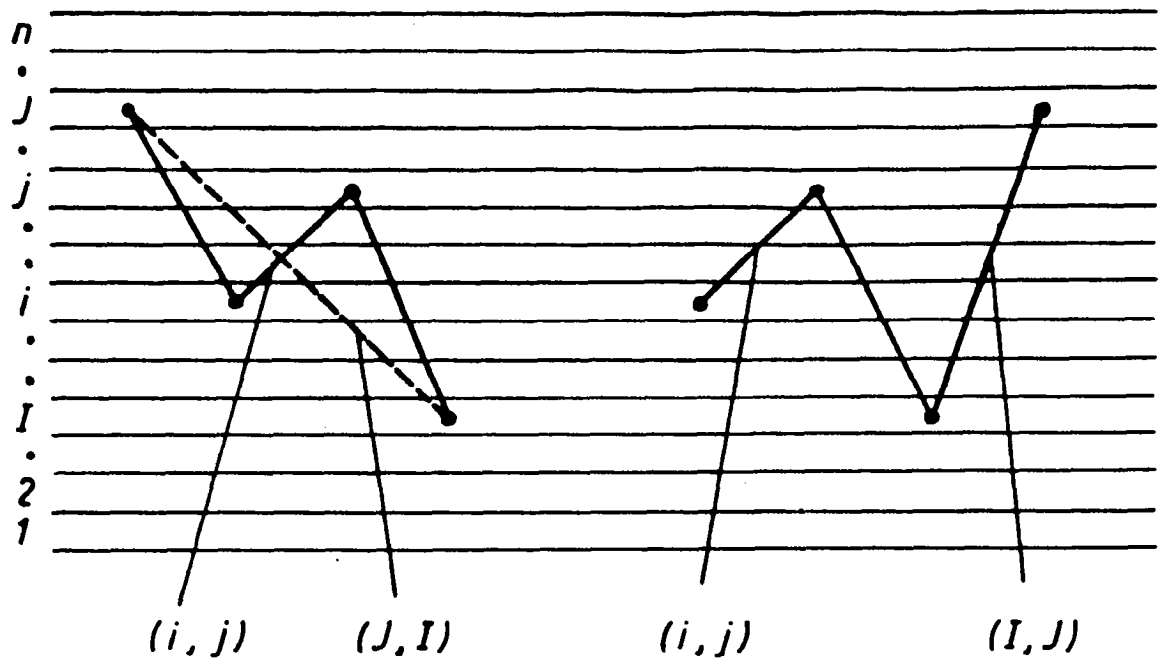
Residuum  $V = (\underline{2}, \underline{1}, \underline{4}, \underline{1}, \underline{3}, \underline{2})$

Rekonstruktionen

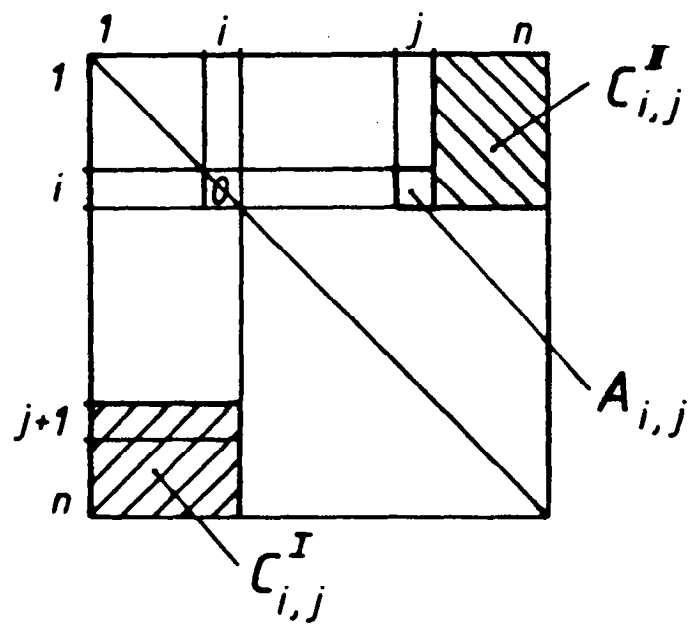
$\underline{2} \quad \underline{1} \quad (3 \quad 1) \quad (4 \quad 2) \quad \underline{4} \quad (2 \quad 3) \quad (2 \quad 3) \quad (1 \quad 3) \quad (1 \quad 3) \quad \underline{1} \quad \underline{3} \quad \underline{2}$   
 $\underline{2} \quad \underline{1} \quad (3 \quad 1) \quad (4 \quad (2 \quad 3) \quad 2) \quad \underline{4} \quad (2 \quad 3) \quad (1 \quad 3) \quad (1 \quad 3) \quad \underline{1} \quad \underline{3} \quad \underline{2}$   
 $\underline{2} \quad \underline{1} \quad (3 \quad 1) \quad (4 \quad (2 \quad 3) \quad (2 \quad 3) \quad 2) \quad \underline{4} \quad (1 \quad 3) \quad (1 \quad 3) \quad \underline{1} \quad \underline{3} \quad \underline{2}$

Rekonstruktion aus unsymmetrischer Rainflow-Matrix

Abb. 9



$A =$



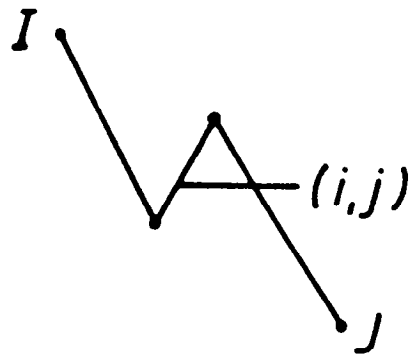
$$C_{i,j}^I = \sum_{u=1}^i \sum_{t=j+1}^n A_{t,u}, \quad C_{i,j}^{II} = \sum_{u=1}^i \sum_{t=j+1}^n A_{u,t}$$

$$CA_{i,j} = C_{i,j}^I + C_{i,j}^{II}$$

Matrix CA aus  
Rainflow - Matrix A

Abb. 10





$$B = \begin{matrix} k=1 \\ \vdots \\ k \\ \vdots \\ n-2 \end{matrix} \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline i & r & \{-1,0,1\} \\ \hline & & \\ \hline \end{array}$$

$$B(k,1) = i \quad k = |j-i| - 1$$

$$B(k,2) = r \quad \text{es wird } (i,j) \text{ } r\text{-mal ausgegeben}$$

$$B(k,3) = \left\{ \begin{array}{l} -1, \text{ wenn } i \text{ noch nicht ausgegeben worden ist} \\ 0, \text{ wenn } i \text{ aber nicht } j \text{ ausgegeben wurde} \\ 1, \text{ wenn } i \text{ und } j \text{ ausgegeben wurden} \end{array} \right\}$$

Steuermatrix  $B$  für  $(i,j)$

Abb. 11

Markov-Matrix

$$P = \begin{bmatrix} . & . & 1 & 1 \\ . & . & 2 & 1 \\ 1 & 2 & . & . \\ 1 & 1 & . & . \end{bmatrix}$$

Residuum  $V_1 = (0, 4, 0, 0, 1, 1)$  max. Baum

Inversionen

1	3	2	3	2	3	1	4	2	4	1
1	4	2	3	2	3	2	4	1	3	1

Residuum  $V_2 = (0, 3, 0, 0, 1, 1)$  max. Baum

Inversionen

1	3	2	3	2	4	2	3	1	4	1
1	4	2	4	1	3	2	3	2	3	1
1	3	2	4	2	3	2	3	1	4	1
1	4	2	3	2	4	1	3	2	3	1

Residuum  $V_3 = (0, 3, 0, 0, 1, 2)$

Inversionen

1	3	2	3	2	4	1	4	2	3	1
1	4	1	3	2	3	2	4	2	3	1
1	4	1	3	2	4	2	3	2	3	1
1	3	2	4	1	4	2	3	2	3	1

Residuum  $V_4 = (0, 4, 0, 0, 2, 1)$

Inversionen

1	3	2	3	1	4	2	3	2	4	1
1	4	2	3	2	3	1	3	2	4	1
1	3	1	4	2	3	2	3	2	4	1
1	4	2	3	1	3	2	3	2	4	1

Inversion  
nach [1]

1	3	2	3	2	3	1	4	2	4	1
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Inversions-Vergleich  
Markov-Residuum  
Markov nach [1]

Abb. 12

## Markov-Residuum

$$V = (4, 0, 0, 1, 2, 2)$$

1	3	2	4	1	2	1	4	2	3	2
1	2	1	3	2	3	2	4	1	4	2
1	2	1	3	2	4	1	4	2	3	2
1	3	2	3	2	4	1	2	1	4	2

## Matrix

$$\begin{bmatrix} . & 1 & 1 & 1 \\ 1 & . & 1 & 1 \\ . & 2 & . & . \\ 1 & 1 & . & . \end{bmatrix}$$

## unsymmetrischer Rainflow

$$V = (\underline{1}, \underline{4}, \underline{2})$$

1	3	2	4	1	2	1	4	2	3	2
1	4	2	3	1	2	1	3	2	4	2
1	4	1	2	1	3	2	4	2	3	2
1	3	2	4	2	3	1	2	1	4	2

## Matrix

$$\begin{bmatrix} . & 1 & . & . \\ . & . & 1 & . \\ . & 1 & . & . \\ 1 & . & . & . \end{bmatrix}$$

## symmetrischer Rainflow

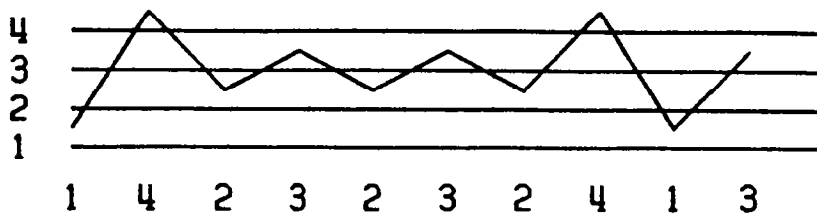
$$V = (\underline{1}, \underline{4}, \underline{2})$$

1	3	2	4	1	2	1	4	2	3	2
1	4	1	2	1	4	2	3	2	3	2
1	3	2	4	1	2	1	3	2	4	2
1	3	2	4	2	3	1	2	1	4	2
1	4	1	2	1	3	2	4	2	3	2
1	2	1	4	1	3	2	3	2	4	2
1	4	1	2	1	3	2	3	2	4	2
1	2	1	3	2	4	2	3	1	4	2
1	2	1	3	2	3	2	4	1	4	2
1	3	2	3	2	4	1	2	1	4	2
1	2	1	3	2	4	1	4	2	3	2
1	4	2	3	1	2	1	4	2	3	2
1	2	1	4	2	3	2	3	1	4	2
1	4	2	3	1	2	1	3	2	4	2
1	2	1	4	2	3	1	3	2	4	2
1	2	1	4	1	3	2	4	2	3	2
1	4	2	3	2	3	1	2	1	4	2
1	2	1	4	2	3	1	4	2	3	2
1	2	1	4	1	4	2	3	2	3	2
1	2	1	3	2	4	1	3	2	4	2

## Matrix

$$\begin{bmatrix} . & 1 & . & 1 \\ 1 & . & 2 & . \\ . & 2 & . & . \\ 1 & . & . & . \end{bmatrix}$$

## Umkehrpunkte



## Markov - Residuum

$$V = (3, 4, 0, 0, 0, 1)$$

1	4	2	3	2	3	2	4	1	3
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

## Matrix

$$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & 1 & 1 \\ \cdot & \cdot & 2 & 1 \\ \cdot & 2 & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

## unsymmetrischer Rainflow

$$V = (\underline{1}, \underline{4}, \underline{1}, \underline{3})$$

1	4	2	3	2	3	2	4	1	3
1	4	2	4	2	3	2	3	1	3
1	4	2	3	2	4	2	3	1	3

## Matrix

$$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

## symmetrischer Rainflow

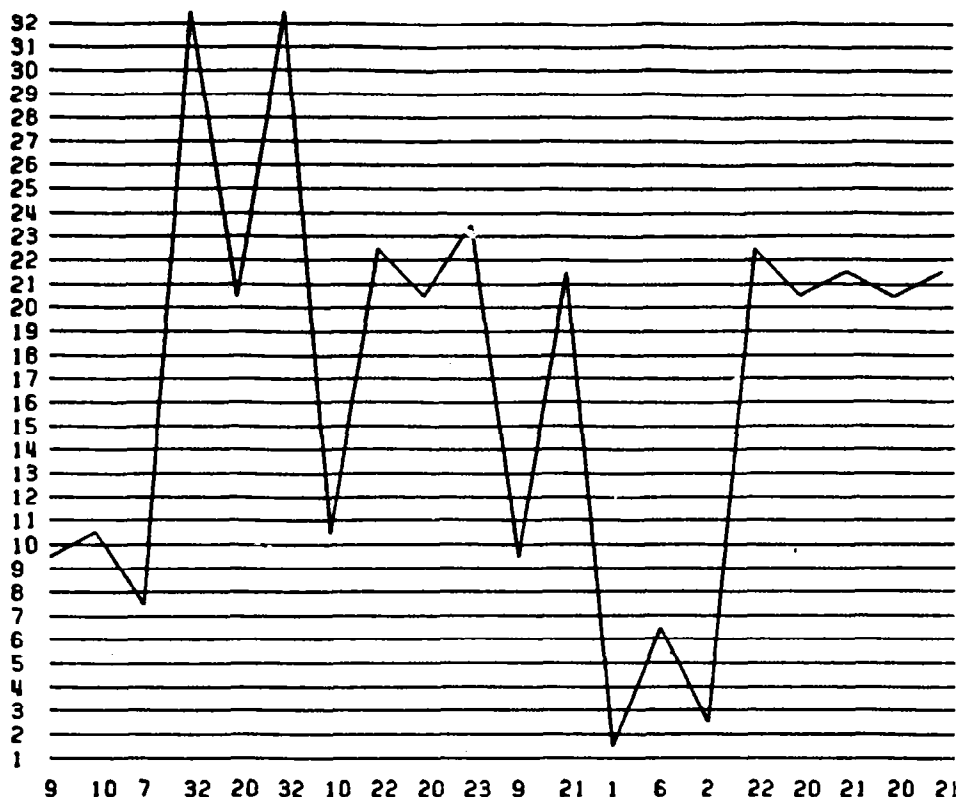
$$V = (\underline{1}, \underline{4}, \underline{1}, \underline{3})$$

1	4	2	3	2	3	2	4	1	3
1	4	2	3	2	4	1	3	2	3
1	4	2	4	2	3	2	3	1	3
1	3	2	4	2	3	2	4	1	3
1	4	2	4	1	3	2	3	2	3
1	4	2	4	2	3	1	3	2	3
1	3	2	3	2	4	2	4	1	3
1	4	2	3	2	4	2	3	1	3
1	3	2	4	2	4	2	3	1	3
1	3	2	4	2	4	1	3	2	3

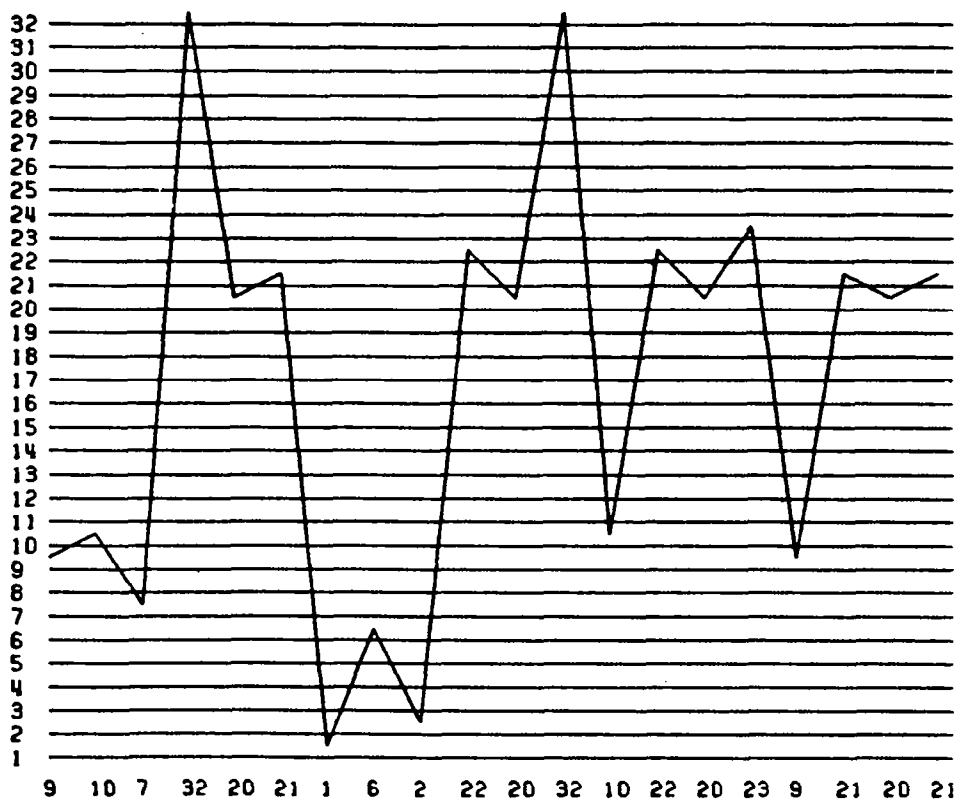
## Matrix

$$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 2 & 1 \\ \cdot & 2 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

a.



b.



a. gegebene BAZF

b. Markov - Rekonstruktion

Abb. 15a,b

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	
1	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
3	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
4	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
5	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
6	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
7	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1
8	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
9	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
10	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
11	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
12	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
13	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
14	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
15	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
16	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
17	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
18	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
19	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
20	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	2	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	
21	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	
22	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	
23	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
24	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
25	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
26	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
27	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
28	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
29	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
30	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
31	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
32	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

*Residuum*

$1^- \longrightarrow \cdot 6$   
 $2^- \longrightarrow \cdot 22$   
 $7^- \longrightarrow \cdot 32$   
 $9^- \longrightarrow \cdot 21$   
 $10^- \longrightarrow \cdot 22$   
 $20^- \longrightarrow \cdot 21$

$6^+ \longrightarrow \cdot 2$   
 $10^+ \longrightarrow \cdot 7$   
 $21^+ \longrightarrow \cdot 0^{(*)}$   
 $22^+ \longrightarrow \cdot 20$   
 $23^+ \longrightarrow \cdot 9$   
 $32^+ \longrightarrow \cdot 10$

$(*)_{21^+}$  ist Endwert

Markov - Matrix  
der BAZF Abb. 15 a

Abb. 15 c

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	
1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
3	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
4	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
5	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
6	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
7	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
8	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
9	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
10	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
11	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
12	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
13	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
14	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
15	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
16	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
17	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
18	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
19	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
20	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
21	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
22	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
23	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
24	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
25	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
26	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
27	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
28	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
29	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
30	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
31	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
32	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

Residuum  $V = ( \underline{9}, \underline{10}, \underline{7}, \underline{32}, \underline{1}, \underline{22}, \underline{20}, \underline{21} )$

unsym. Rainflow-Matrix  
der BAZF Abb. 15 a

Abb. 15 d

*Rekonstruktionen aus Markov-Residuum  
nach Abb. 15 b*

NR																				
1	9	10	7	32	20	32	10	22	20	23	9	21	1	6	2	22	20	21	20	21
2	9	10	7	32	20	21	1	6	2	22	20	32	10	22	20	23	9	21	20	21
3	9	10	7	32	20	32	10	22	20	21	1	6	2	22	20	23	9	21	20	21
4	9	10	7	32	20	21	20	23	9	21	1	6	2	22	20	32	10	22	20	21
5	9	10	7	32	20	32	10	22	20	23	9	21	20	21	1	6	2	22	20	21
6	9	10	7	32	20	21	1	6	2	22	20	23	9	21	20	32	10	22	20	21
7	9	10	7	32	20	32	10	22	20	21	20	23	9	21	1	6	2	22	20	21
8	9	10	7	32	20	23	9	21	20	32	10	22	20	21	1	6	2	22	20	21
9	9	10	7	32	20	23	9	21	1	6	2	22	20	32	10	22	20	21	20	21
10	9	10	7	32	20	23	9	21	1	6	2	22	20	21	20	32	10	22	20	21
11	9	10	7	32	20	21	20	32	10	22	20	23	9	21	1	6	2	22	20	21
12	9	10	7	32	20	23	9	21	20	21	1	6	2	22	20	32	10	22	20	21

*Rekonstruktionen aus unsym. Rainflow-Matrix  
nach Abb. 15 c*

NR																				
1	9	10	7	32	20	32	10	22	20	23	9	21	1	6	2	22	20	21	20	21
2	9	10	7	32	20	32	10	23	9	21	1	6	2	22	20	21	20	22	20	21
3	9	10	7	32	20	32	10	22	20	21	20	23	9	21	1	6	2	22	20	21
4	9	10	7	32	20	32	10	23	9	21	1	6	2	22	20	22	20	21	20	21
5	9	10	7	32	20	32	20	21	10	23	9	21	1	6	2	22	20	22	20	21
6	9	10	7	22	20	21	20	32	20	32	10	23	9	21	1	6	2	22	20	21
7	9	10	7	22	20	32	20	21	20	32	10	23	9	21	1	6	2	22	20	21
8	9	10	7	32	20	21	20	32	10	22	20	23	9	21	1	6	2	22	20	21
9	9	10	7	22	20	32	20	32	10	23	9	21	1	6	2	22	20	21	20	21
10	9	10	7	22	20	32	20	32	20	21	10	23	9	21	1	6	2	22	20	21
11	9	10	7	22	20	32	20	32	10	23	20	21	9	21	1	6	2	22	20	21
12	9	10	7	32	20	32	20	21	10	22	20	23	9	21	1	6	2	22	20	21
13	9	10	7	32	20	32	10	23	20	21	9	21	1	6	2	22	20	22	20	21
14	9	10	7	32	20	21	20	32	10	23	9	21	1	6	2	22	20	22	20	21
15	9	10	7	32	20	32	10	22	20	23	20	21	9	21	1	6	2	22	20	21



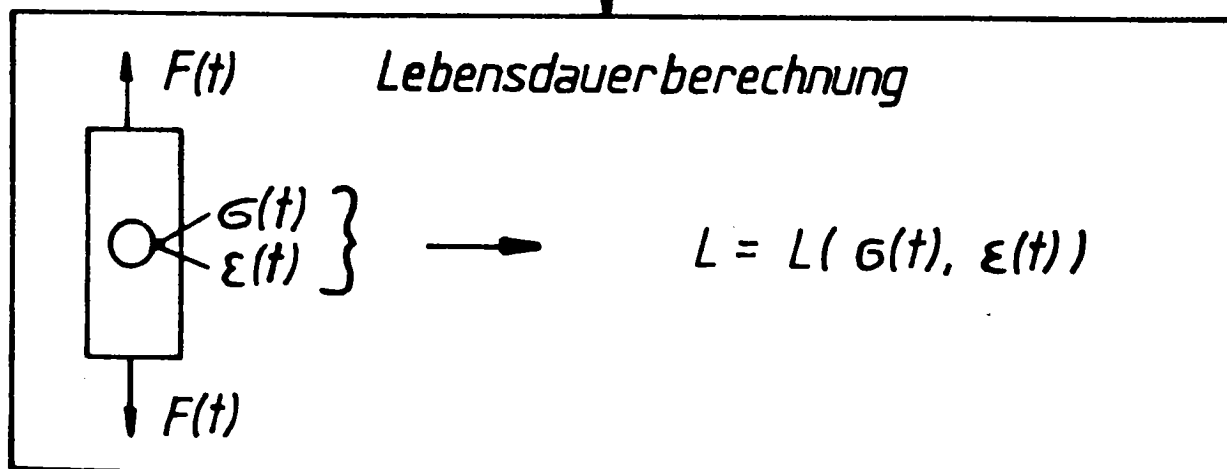
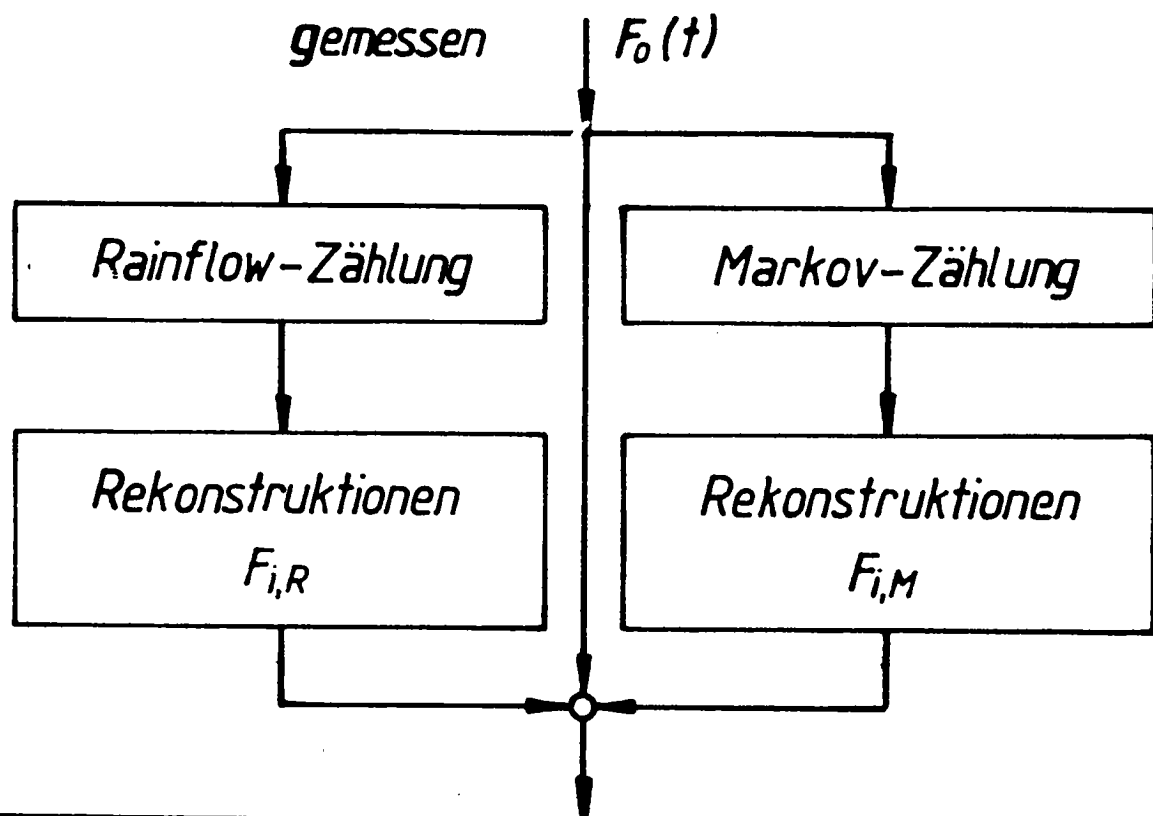
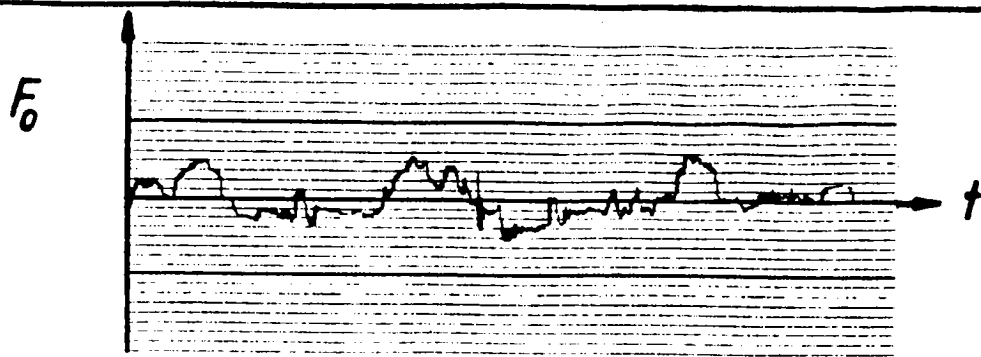
BAZF – Nr.  
nach Abb.15 e

### Rekonstruktionshäufigkeit

	1000	2000	3000	4000	5000	6000	7000	8000	9000	10000
1	63	123	186	244	305	361	434	496	565	626
2	66	128	182	252	321	376	437	494	557	633
3	74	134	195	259	332	383	448	500	568	642
4	56	126	186	267	324	397	465	530	594	671
5	68	136	204	263	325	382	458	524	589	663
6	62	138	201	289	359	445	516	587	649	713
7	75	138	198	251	309	380	432	492	575	639
8	58	125	197	265	344	406	462	526	578	645
9	74	132	196	263	336	419	498	577	654	718
10	76	149	221	287	343	409	473	546	609	666
11	67	135	221	286	354	414	480	547	615	680
12	67	136	193	258	329	395	466	534	602	685
13	59	110	179	241	306	370	447	528	593	652
14	63	153	241	298	362	433	491	558	625	694
15	73	138	201	278	352	431	494	562	628	674

Test auf Gleichverteilung

Abb.15 f



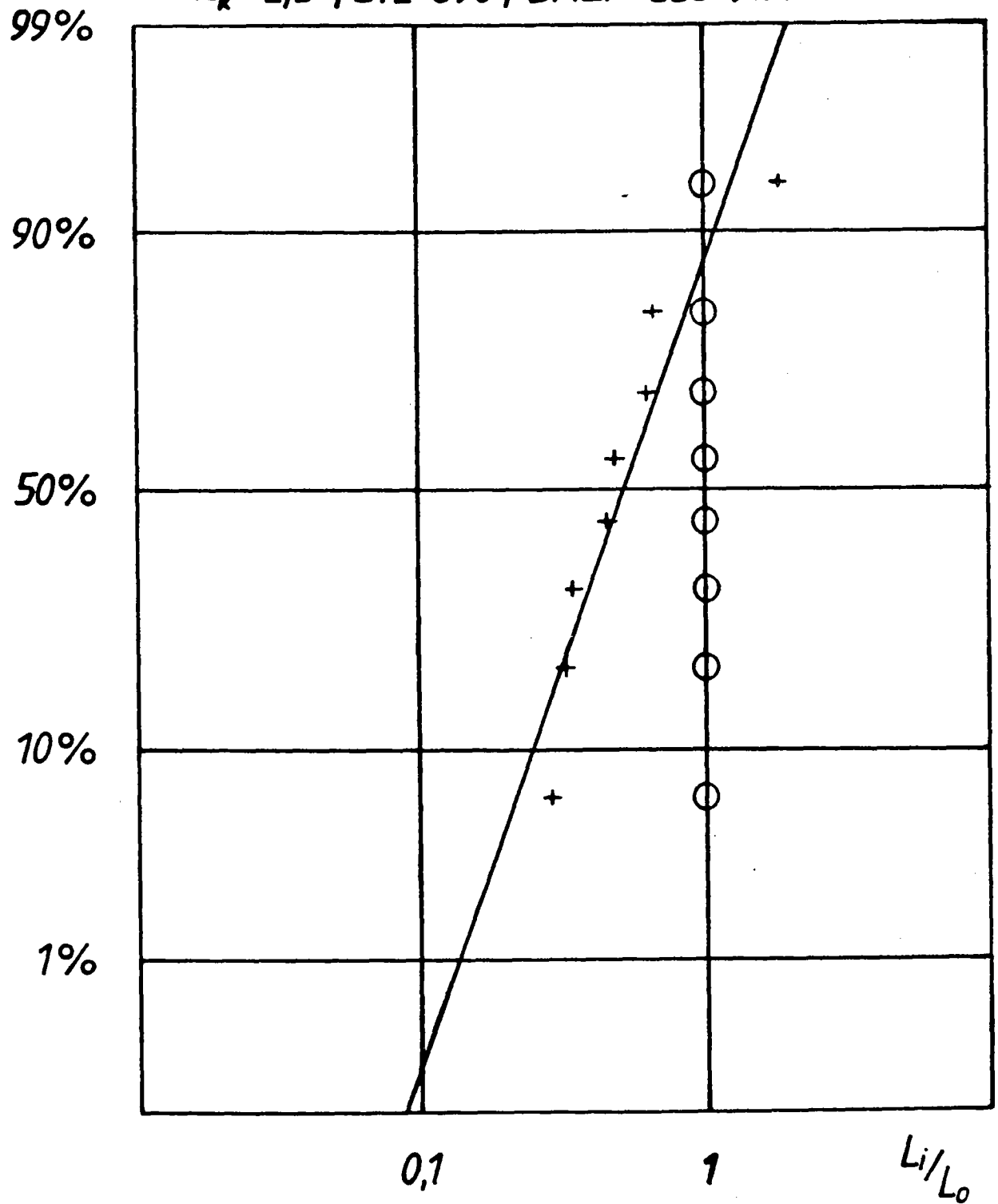
*Lebensdauerverteilung*  $P = P(L_i/L_0)$

*Rainflow - Markov  
Lebensdauerverteilung*

*Abb. 16*

		Mittelwert	Streuung
Markov	+	0,510	0,256
Rainflow	○	1,004	0,002

$\alpha_k = 2,5$  ; StE 690 ; BAZF aus Abb. 1



Lebensdauerverteilung  $Li/L_0$

Abb. 17